

キーワードオークションの特徴

中川彩野

2024年3月11日

概要

本稿では、検索連動型広告の広告枠を売買するオークションであるキーワードオークションについて、理論研究によって明らかにされている特徴を整理する。続いて、基本モデルを拡張することでモデルの特徴がどのように変化するかを議論する。

1 はじめに

1.1 検索連動型広告とは

検索連動型広告とは、Google や Yahoo! などの検索エンジンでの検索結果に連動して表示される広告のことである。検索エンジンのユーザーが実際に検索した語句に基づいて表示される検索連動型広告は、その語句に興味のある消費者を対象を絞って表示させることができるため、効果的な広告である。例えば図1は Google 検索で「検索連動型広告とは」と検索したときの検索結果のページのスクリーンショットである。赤枠で囲われているのが検索結果に連動する広告枠で、その下にあるのが検索結果である。電通 (2023) によれば、2022 年の検索連動型広告費はインターネット広告媒体費の 39.4% を占め、9,766 億円にもなり、前年比 122.2% と大きく成長している。

ユーザーが検索した語句に応じて検索連動型広告を表示させる方法として、Exact match(完全一致) と Broad match(部分一致) と呼ばれる 2 つの代表的な方法がある¹。ユーザーが検索した語句と全く同じ語句に基づく

¹Google「キーワードのマッチタイプについて」https://support.google.com/google-ads/answer/7478529?hl=ja&ref_topic=10549272&sjid=183701796384783094-AP, 2024 年 3 月 8 日閲覧



図 1: 検索連動型広告の例

検索結果に応じた広告を表示させる Exact match に対して、Broad match はユーザーが検索した語句と関連した他の語句に基づく検索結果も含めて広告を表示させる方法である。検索エンジンを利用して検索を行うユーザーの視点から見れば、例えば「コーヒー」という語句を検索したとき、「コーヒー」という語句に基づく検索結果だけでなく、「コーヒー豆」や「缶コーヒー」、「喫茶店」といったような類似の語句に基づく検索結果も同時に表示されるような状況が Broad match である。広告主の視点から見れば、Broad match を使うことによって、「コーヒー」という語句に基づいて表示される広告をそれ以外の「コーヒー豆」や「缶コーヒー」といった類似の語句を検索したユーザーに対しても表示できるため、Exact match よりも多くのユーザーに対して自らの広告を表示できる。さらに「コーヒー」と類似の語句である「コーヒー豆」や「缶コーヒー」といった語句に対して個々に入札を行わなくても、それらの語句に入札した場合と同じように広告を表示できる。すなわち広告主はどの検索語句に入札を行うかを検討する手間を省きつつ、多くのユーザーに対して自らの広告を表示できるという利益を受けることができる。これらの表示方法の違いについての理論的な説明は第 3 章で行う。

1.2 キーワードオークションとそのルール

一般に検索エンジンでの検索結果のページには、複数の広告が表示される。その複数の広告枠にどの広告主の広告を表示させるか、また表示させる際にいくら支払わせるかを決定するのがキーワードオークションである。本オークションの売り手は Google などの検索エンジンで、買い手(入札者)は広告を出稿したい広告主である。本オークションは検索エンジンのユーザーが語句を検索するたびに行われ、その時点での広告主たちの入札額に基づいて検索結果のページに広告が表示される。入札者である広告主はいつでも入札額を変更することができ、自らが入札しているオークションの結果を見ながら逐一入札額を変化させることが可能である。検索エンジンは広告主らの入札を用いて、どの広告枠をどの広告主に割り当て、彼らにいくら支払わせるかを決定する。この割り当てと支払い額を決定するのがオークションルールである。

代表的なオークションルールとして、GSP(Generalized Second Price)ルールと VCG(Vickrey-Clarke-Groves)ルールがある。GSP ルールでは、入札額が大きい順に広告枠を上から割り当てる。つまり最も入札額の大きい広告主が1番上の広告枠を獲得し、2番目に入札額の大きい広告主が2番目の枠を獲得し、3番目に入札額の大きい広告主が…と続く。そして広告枠を得た広告主は、「自分の次に大きい入札額」を支払う²。一方 VCG ルールでは、広告枠の割り当て方は GSP と同様であるが、支払額の決定方法が異なる。VCG ルールで広告枠を得た広告主が支払う額は、「現在他の広告主たちが得ているもの」と「自分がこのオークションに参加しなかった場合に他の広告主が得るであろうもの」との差である。したがってこの支払額は「自分がオークションに参加することによって発生する迷惑料」として解釈される。例えば第1枠を獲得した広告主がもしオークションに参加していなかったとしたら、他のすべての広告主たちは今より1つ上の広告枠を獲得できていたはずである。したがって第1枠を獲得した広告主が支払うのは、他の広告主たちが今得ている広告枠の1つ上の広告枠から得られるものと、今得ている広告枠から得られるものとの差を、すべての広告主について足し合わせた額である。

GSP ルールと VCG ルールの違いについて、具体的な例を用いて説明する。例えば広告主が3人(広告主 A, B, C)、広告枠が2つ(第1枠, 第2枠)ある場合を考える(図2参照)。つまり広告主の人数に対して広告枠が足りない状況である。そして各広告主は広告枠を獲得することで表1の

²自分の次に大きい入札額に、特定の値をかけた額を支払額とするルールもある。

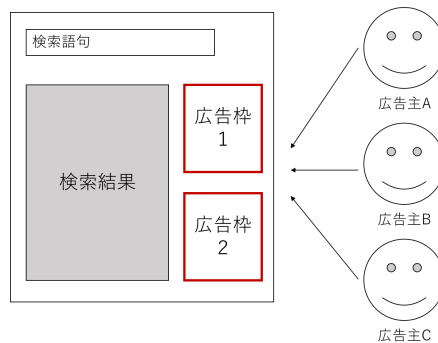


図 2: 広告主 3 人広告枠 2 つの例

ような利益 (評価値と呼ぶ。詳しくは第 2 章で説明する。) を得るとする。各広告主の評価値は検索結果のページに自分の広告が表示され、クリックされることによって発生する利益を表している。さらに今回の例では、第 1 枠は第 2 枠に比べて 2 倍クリックされやすいため、もし第 1 枠を獲得した場合には表 1 にある値の 2 倍の利益を得られるものとする。またいずれの広告主も、広告枠を得られなかった場合の利益は 0 であるとする。

	A	B	C
評価値	10	15	5

表 1: 広告主の評価値

まずは GSP ルールに基づいて広告枠の割り当てと支払額の決定を行う場合を考える。もし広告主 A が 10、広告主 B が 8、広告主 C が 6 と入札したとすると、最も入札額が大きいのは広告主 A であるから、広告主 A が第 1 枠を獲得する。次に入札額が大きいのは広告主 B なので、広告主 B が第 2 枠を獲得する。最も入札額が小さかった広告主 C は、広告枠を得られない。そして第 1 枠を獲得した広告主 A は、自分の次に大きい入札額である広告主 B の入札額 8 を支払う。同様に第 2 枠を獲得した広告主 B は、自分の次に大きい入札額である広告主 C の入札額 6 を支払う。広告枠を得られなかった広告主 C には支払いは発生しない。したがって広告主 A は第 1 枠を獲得することによって、自分の評価値の 2 倍である $10 \times 2 = 20$ の利益を得るものの、8 を支払うので手元に残る額 (利得と呼ぶ) は 12 である。同様に広告主 B は第 2 枠を獲得して自分の評価値と同じ 15 の利益を得るものの 6 を支払うので利得は 9、広告主 C は広告枠を

獲得できず利益は0だが支払いもないので利得は0である。この例におけるオークションの結果として、各広告主の入札額と広告枠の割り当て、支払額と利得をまとめると、以下の表2のようになる。

	A	B	C
評価値	10	15	5
入札額	10	8	6
広告枠	第1枠	第2枠	なし
支払額	8	6	0
利得	12	9	0

表 2: GSP ルールによるオークション結果

次に VCG ルールに基づいて広告枠の割り当てと支払額の決定を行う場合を考える。先ほどの例と広告主の入札額は同じであるとする。すると広告枠の割り当ても同じで、広告主 A が第 1 枠、広告主 B が第 2 枠を獲得し、広告主 C は広告枠を獲得できない。そして第 1 枠を獲得した広告主 A の支払額は、もし広告主 A がいなかった場合に広告主 B と C が得るであろうものと、今広告主 B と C が得ているものの差となる。もし今第 1 枠を獲得している広告主 A がオークションに参加していなかったならば、広告主 B の入札額が最も大きい入札額となるので、広告主 B が第 1 枠を獲得していたはずである。また広告主 C の入札額が 2 番目に大きい入札額となるので、広告主 C は第 2 枠を獲得していたはずである。したがって広告主 A の支払額は、「広告主 B が第 1 枠を獲得して得るもの + 広告主 C が第 2 枠を獲得して得るもの」から「広告主 B が第 2 枠を獲得して得るもの + 広告主 C が広告枠を獲得できないときに得るもの」を引いた値となる³。したがって広告主 A の支払額は、「 $8 \times 2 + 6$ 」から「 $8 + 0$ 」を引いて 14 となる。次に第 2 枠を獲得した広告主 B の支払額は、広告主 B がいなくなることによって広告主 A と C が得るであろうものと、今広告主 A と C が得ているものの差になる。今第 1 枠を獲得している広告主 A は、広告主 B がいなくなったとしても第 1 枠を獲得できることに変わりはない。したがってどちらの場合でも広告主 A は 10 を得る。一方今広告枠を獲得できていない広告主 C は、広告主 B がいなくなったら第 2

³各広告主が得るものを計算する場合には、表 1 にある各広告主の利益の値ではなく、各広告主が実際に入札した入札額を用いることに注意が必要である。なぜならオークションを実施する側である検索エンジンは各広告主の利益の値を知ることができないからである。

枠を獲得できるようになるので、広告主 C は今得ているものは 0 だが広告主 B がいなくなったら 6 を得られる。したがって広告主 B がなくなった場合の広告主 B の支払額は、「 $10 + 6$ 」から「 $10 + 0$ 」を引いて 6 となる。最後に何も獲得していない広告主 C は、いてもいなくても広告主 A と B の広告枠の割り当てに影響しないので、広告主 A と B が得るであろうものと今得ているものとの差は 0 である。したがって支払額も 0 である。ゆえに、第 1 枠を得た広告主 A は自分の評価値の 2 倍である 20 の利益を得るが 14 を支払うので利得は 6、第 2 枠を得た広告主 B は自分の評価値と同じ 15 の利益を得るが 6 を支払うので利得は 9、広告主 C は広告枠を獲得できず支払いもないので利得は 0 である。

このように、ある広告主が入札することによって影響を受けるのは、当該の広告主よりも低い値を入札した広告主だけである。したがってキーワードオークションにおいて VCG ルールによるある広告主の支払額の計算をするときは、当該の広告主よりも高い入札額をした広告主を無視することができる。

VCG ルールによるオークション結果をまとめると、以下の表 3 のようになる。

	A	B	C
評価値	10	15	5
入札額	10	8	6
広告枠	第 1 枠	第 2 枠	なし
支払額	14	6	0
利得	6	9	0

表 3: VCG ルールによるオークション結果

1.3 本稿の構成

本稿はキーワードオークションに関する理論研究をレビューし、本オークションの特徴についてどのようなトピックが議論されているのかを明らかにする。また本オークションの様々なトピックのうち、Broad match に関するトピックを取り上げ、その分析モデルと研究成果について論じる。まず第 2 章ではキーワードオークションのモデルを定義し、その特徴を説明するとともに、モデルの拡張についても議論する。そして第 3 章

では拡張方法の一つである Broad match について、Broad match に対応するモデルを設定しその特徴について解説する。最後に第 4 章では本稿の内容をまとめるとともに、キーワードオークションの理論研究では未解決となっている実務上の課題を紹介する。

2 キーワードオークションのモデルと特徴および拡張

本章ではまず 2.1 節でキーワードオークションの基本的なモデルを定義し、2.2 節で基本モデルにおけるキーワードオークションの特徴を紹介する。そして 2.3 節でその基本モデルを一部拡張した場合に、キーワードオークションの特徴がどのように変わるかを説明する。

2.1 基本モデル

本オークションの入札者である広告主が n 人おり、 k 個の広告枠を彼らに 1 人 1 枠ずつ分配するオークションを考える。広告枠には順序があり、第 1 枠は検索結果のページの最も上に表示される広告枠を、第 k 枠は最も下に表示される広告枠を表す。そして $n > k$ 、すなわち広告枠の数は広告主の人数よりも少ないとする。

各広告主 i は正の実数である評価値 v_i を持っており、これは自らの広告が検索結果のページに表示され、クリックされたときに得られる利益を表している。本オークションにおいて各広告主は i 正の実数である入札額 b_i を入札し、オークションに参加する。この入札額によって、広告主は検索エンジンに対して「自分の広告が表示された場合にいくらまでなら支払ってもよいか」を表明する。もちろん b_i は v_i と同じでなくてもよい。各広告主の入札額をまとめた入札プロファイルを $b = (b_1, \dots, b_n)$ で表す。

オークションで分配される各広告枠 s には、その枠のクリックされやすさを表す CTR(click through rate) という指標がある。また出稿される広告自体にも、その広告自体のクリックされやすさを表す CTR がある。そこで $\text{CTR}_{i,s}$ によって広告主 i の広告が第 s 枠に掲示された場合の CTR を表す。この $\text{CTR}_{i,s}$ はオークションに参加する全員が知っている情報である。さらに $\text{CTR}_{i,s}$ は広告主 i が出す広告のクリックされやすさを表す

値 (q_i) とその広告枠 s 自体のクリックされやすさを表す値 (θ_s) とを用いて、 $\text{CTR}_{i,s} = q_i \theta_s$ と表すことができるとする。

本オークションにおいてどの広告主にどの広告枠を割り当てるか、いくら支払わせるかを決定するのがオークションルールである。本オークションで用いられる最も一般的なオークションルールである GSP ルールの下では、入札値 b_i が大きい順に広告枠が割り当てられる⁴。すなわち最も大きい入札を行った広告主が第 1 枠を、 k 番目の入札を行った広告主が第 k 枠を獲得する。 $k+1$ 番目以降の入札を行った広告主は、広告枠を獲得できない。そして広告枠を獲得した広告主は、自分の入札額の次に大きい入札額を支払う。すなわち、 j 番目に大きい入札をした広告主を $g(j)$ と表すすると、第 j 枠を獲得した広告主の入札額は $b_{g(j)}$ と表すことができ、この広告主 $g(j)$ が支払う額 $p_{g(j)}$ は $p_{g(j)} = b_{g(j+1)}$ と表される。ただし $j > k$ のときの $p_{g(j)}$ 、つまり広告枠を獲得できなかった広告主の支払額は $p_{g(j)} = 0$ である。

このように広告枠の割り当てと支払額が決定されると、広告主の利得 u_i が計算できる。ここで言う利得とは、広告主が広告枠を獲得することによって得られる利益から支払額を引いた値である。ある広告主 i が広告枠 s を獲得し p_i を支払ったとすると、広告主 i の利得は式 (1) のように表される。

$$u_i = \theta_s v_i - p_i \quad (1)$$

式 (1) にあるように、広告主 i が広告枠を獲得することによって得られる利益は、広告主 i の評価値 v_i にその広告主が得た広告枠 s のクリックされやすさを表す θ_s をかけた値である。これは広告主 i の評価値 v_i は広告枠に依存せず決まるものの、その広告枠に出稿した広告がどれくらいクリックされやすいかが広告枠によって異なるためである。一般に第 1 枠のクリックされやすさ θ_1 が最も大きく、第 k 枠のクリックされやすさ θ_k が最も小さいものとする。

GSP 以外のオークションルールとして、VCG ルールが挙げられる。VCG ルールの広告枠の割り当て方法は GSP と同じである。VCG ルールにおける広告主 i の支払額は、広告主 i がオークションに参加することによって他の広告主が被った迷惑料として定義される。広告主 i がオークションに参加することによって迷惑を被るのは、広告主 i よりも小さな値を入札している広告主だけだから、広告主 i よりも小さな値を入札しているすべての広告主について「広告主 i がいない場合に得られる利益 - 広告主 i が

⁴ $q_i \times b_i$ の大きい順で割り当てる方法もある。

いる場合に得られる利益」を足し合わせたものが、広告主 i の支払額である。ここで再び j 番目に大きい値を入札した広告主を $g(j)$ と置き、広告主 $g(j)$ よりも小さな値を入札しているすべての広告主について「広告主 $g(j)$ がいない場合に得られる利益」を足し合わせると、

$$\sum_{h=j+1}^{k+1} (\theta_{h-1} b_{g(h)})$$

となる。ここで θ の添え字が h ではなく $h-1$ になっているのは、広告主 $g(j)$ がいなくなることによって、元々の広告枠よりも 1 つ上の広告枠を獲得することができるようになるからである。一方「広告主 $g(j)$ がいる場合に得られる利益」を広告主 $g(j)$ よりも小さな値を入札しているすべての広告主について足し合わせると

$$\sum_{h=j+1}^k (\theta_h b_{g(h)})$$

となるから、広告主 i の支払額は

$$\sum_{h=j+1}^{k+1} (\theta_{h-1} b_{g(h)}) - \sum_{h=j+1}^k (\theta_h b_{g(h)}) = \sum_{h=j+1}^k (\theta_{h-1} - \theta_h) b_{g(h)} + \theta_k b_{g(h+1)} \quad (2)$$

によって計算できる。

実際のキーワードオークションは連続的に絶え間なく行われているが、本稿における分析では 1 回きりのオークションとして考える。また本章では分析対象とする検索語句を 1 つに固定し、その検索語句のページに表示される k 個の広告枠をオークションするものとする。さらに検索結果の表示方法は Exact match であり、対象とする検索語句以外の語句についてはオークションの対象としないものとする。

2.2 特徴

本節では、前節の基本モデルによって定義されるキーワードオークションがどのような特徴を持っているかを説明する。

キーワードオークションの GSP と VCG という 2 つのルールの違いとして、GSP では広告主が自らの評価値をそのまま入札することが支配戦略にならないが、VCG では支配戦略になるという点が挙げられる。すな

わち GSP では各広告主 i が $b_i = v_i$ とする入札 (以降正直入札と呼ぶ) は支配戦略にならないが、VCG では支配戦略になる。ここでいう支配戦略とは、「自分以外の広告主がどんな額を入札していたとしても、自分が損をしない入札」のことである。つまり、VCG では他の広告主がどんな額を入札していたとしても正直入札をしておけば損をしないが、GSP では正直入札をしても損をする可能性がある (自分が得をする入札が他にある可能性がある) ということである。

オークションのルールを設計するという文脈において、この「正直入札が支配戦略である」という性質は「耐戦略性 (strategy-proofness)」と呼ばれる重要な特徴である。なぜなら耐戦略性を満たさない (正直入札が支配戦略にならない) オークションでは、入札者たちは互いの入札額を読みあい戦略的な入札を行うことになってしまい、オークションの結果が望ましくない方向に変わってしまうおそれがあるからである。したがってキーワードオークションのルールとして耐戦略性を満たさない GSP と耐戦略性を満たす VCG とを比べると VCG の方が優れているように思われるが、VCG の方が支払額の計算が難しい (式 (2) 参照) ため、実際によく使われているのは GSP である。

GSP ルールは正直入札が支配戦略にならないため、その特徴を議論する上ではナッシュ均衡がよく用いられる。前述の支配戦略は入札額 b_i に対して定義される概念であるのに対し、ナッシュ均衡は入札プロファイル $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ に対して定義される概念である。オークションにおいてある入札プロファイルがナッシュ均衡であるとは、「すべての入札者が最適入札を行っている」状況のことであり、最適入札とは「自分以外の入札者の入札を所与としたとき、自分が損をしない入札」のことである。したがってナッシュ均衡においては、すべての入札者が「他の入札者が入札額を変えないなら自分も入札額を変える必要はない」と考えているので、ある種の安定的な状況になっている。ゆえにオークションのルールを設計する上ではナッシュ均衡が存在するか、存在するとしてどのような入札プロファイルがナッシュ均衡であるかが重要な論点であるが、キーワードオークションの GSP ルールではナッシュ均衡は必ず存在するということが知られている (Edelman et al., 2007; Varian, 2007)。

ただしナッシュ均衡である入札プロファイルの範囲が広いと、理論分析の文脈ではナッシュ均衡の一種である LEF (Locally Envy-free) 均衡を用いることが多い。LEF 均衡とは、「すべての広告主が今得ている広告枠の 1 つ上もしくは 1 つ下の広告枠を得たとしても得をしない」状況のこ

とである⁵。LEF 均衡もどのような場合でも存在することが知られている (Edelman et al., 2007)。またさらに Edelman et al. (2007) によれば、GSP ルールでの LEF 均衡におけるオークション主催者側である検索エンジンの利潤 (広告主たちが検索エンジンに対して支払った額の総和を指す) は、VCG ルールでの支配戦略均衡 (すべての広告主が支配戦略をとっている状況) における検索エンジンの利潤と同じかそれより高くなっている。

2.3 基本モデルの拡張

本節では 2.1 節で定義した基本モデルの拡張について、キーワードオークションの理論研究をレビューした Qin et al. (2015) の紹介するトピックに基づいていくつか紹介する。ただし本節で紹介する理論研究は前節で紹介した基づくキーワードオークションの特徴について言及していない研究がほとんどで、また経済学以外の分野における研究も多い。したがって本節では、基本モデルを拡張する方法としてどのような方法があるかを中心に紹介する。

CTR が独立でない場合 2.1 節で定義した基本モデルでは、CTR は $q_i\theta_s$ と表され、広告自体のクリックされやすさ (q_i) とその広告枠自体のクリックされやすさ (θ_s) によって独立に定まるとしていた。しかし実際には、ある広告枠の広告のクリックされやすさは同時に同じページに存在する他の広告に依存して変わり得る。この状況を分析する方法として、主に 3 つのアプローチが挙げられる。

1 つ目のアプローチは、Choice Model と呼ばれるモデルによるアプローチである。Choice Model とは、検索エンジンのユーザーが複数の広告からなる集合の中から多くとも 1 つを選んでクリックするとするモデルである (Ghosh and Mahdian, 2008)。このモデルでは検索エンジンが、社会余剰 (広告主の利得と検索エンジンの利潤を足したもの) の期待値を最大化するように広告の集合を選ぶ、という最適化問題を解く。Ghosh and Mahdian (2008) はこの最適化問題が NP 困難であるということを示したが、このモデルでは選んだ広告をどの順番で掲示するかを考慮していないので、実際のキーワードオークションの設定とは少し異なっている。

⁵Varian (2007) は同様の性質を持つナッシュ均衡を対称ナッシュ均衡として定義しているが、両文献が定義する均衡は同一のものである (Qin et al., 2015)。

2つ目のアプローチは、Cascade Model と呼ばれるモデルによるアプローチである。Cascade Model では、検索エンジンのユーザーはある広告枠 a_i の広告を見ると、その広告の CTR である q_{a_i} の確率でその広告をクリックする。その後ある確率 c_{a_i} で次の広告枠を見るが、 $1 - C_{a_i}$ で次の広告枠を見ずにやめてしまう。そしてこのプロセスを第1枠から始め、見るべき広告がなくなったら終了する。Aggarwal et al. (2008), Deng and Yu (2009), Giotis and Karlin (2008) などはこのモデルにおける社会余剰を計算し、社会余剰を最大化するために必要ないくつかの性質、例えば広告枠を並べる順序を広告主が次の広告を見るかどうかに関わる c という値に依存して決めるようにするといった性質を導出したり、このモデルにおいてナッシュ均衡が存在することを示したりした。

3つ目のアプローチは、Social Context Graph を用いるモデルによるアプローチである。Fotakis et al. (2011) は、広告主の ID や表示される広告の相対的な順序、他の広告との距離などからなる Social Context Graph と呼ばれるグラフ⁶を用いて、ある広告はランク付けされたリストの近隣の広告にのみ影響を与えられるとして分析した。そして彼らはこのモデルにおいて、オークションの勝者を決定する問題が NP 困難であることを示した。

CTR が分からない場合 2.1 節で定義した基本モデルでは、CTR はすべて事前に分かっているものとしていた。しかし実際には、CTR がどうなるかはオークションをしてみないと分からず、予測するしかないという状況がある。この CTR を予測するアプローチとして、理論研究では主に2つのアプローチがある。

1つ目は Click Prediction Model と呼ばれるアプローチである。これは機械学習によって広告の CTR を予測するアプローチであり、このアプローチはさらに Feature Extraction と Model Selection に分けられる。Feature Extraction とは、どのような情報が CTR を予測するのに適切かを議論するアプローチで、Dembczynski et al. (2008) や Attenberg et al. (2009) はある広告の将来の CTR を予測するためには、その広告の過去のクリック数の情報が有効であると示した。他にも、過去のクリック数の情報がない場合などにはその広告の検索語句との類似性や広告自体の質が重要であるとする研究もある (Clarke et al. (2007) など)。一方 Model Selection とは様々な情報をどのように用いて CTR を予測するべきかを議

⁶ここでいうグラフとは、関数を視覚化する際に用いる「グラフ」ではなく、いくつかの点がいくつかの線で結ばれている数学的な構造のことを指す。

論するアプローチで、例えば Xu et al. (2010) が提案した時間情報と空間情報を必要とするベイジアンフレームワークがある。他にも広告の特徴やウェブページでの位置、検索エンジンユーザーの心理などが予測のための情報として用いられ、予測のためのフレームワークには最大エントロピーモデル、プロビット回帰分析などがある。

2つ目は Multiarmed Bandit (MAB) Mechanisms と呼ばれるアプローチである。これは CTR を予測してメカニズムの設計のためにオンライン学習を適用する際の主な課題である、CTR に関するより多くの情報を収集する探索とそのために失われる収益とのトレードオフに対応するため、MAB アルゴリズムを用いるというアプローチである。例えば Pandey and Olston (2006) は予算制約がある場合にどのように広告枠を割り当てるかを MAB 問題としてモデル化し、検索エンジン収益の限界を示した。他にも広告主たちの戦略的な入札行動を前提とするモデルや、探索とオークションの実施を別のラウンドとしたモデルなどがある。

広告主に予算制約がある場合 2.1 節で定義した基本モデルでは、各広告主は自由に入札額として正の実数 b_i を入札するとしており、その入札額に基づいて支払額が決定された。しかし実際には、広告主たちには支払うことができる上限額、すなわち予算制約がある。各広告主に予算制約がある状況进行分析する場合には、次のようにモデルが拡張される。

まず各広告主 i は、予算 B_i を持っており、この範囲でしか入札ができない。そして基本モデルとは異なり、検索語句が m 個あり各検索語句につき k 個の広告枠があるとする。つまりある検索語句のページだけでなく、複数の検索語句それぞれのページでの広告表示を考えるとということである。そして各広告主 i は検索語句 j について評価値 $v_{i,j}$ を持っており、各検索語句に対して $b_{i,j}$ を入札する。例えば検索語句の数が「コーヒー」と「紅茶」と「ジュース」の3つであるなら、広告主 A の評価値は3つ ($v_{A, \text{コーヒー}}$ と $v_{A, \text{紅茶}}$ と $v_{A, \text{ジュース}}$) あり、入札額も各検索語句に対して入札するので3つ ($b_{A, \text{コーヒー}}$ と $b_{A, \text{紅茶}}$ と $b_{A, \text{ジュース}}$) ある。そしてどの広告主にどの検索語句のどの広告枠を分配するか、というオークションの分配ルールは、 $x_{i,j,s}$ という変数で表される。この変数は広告主 i が検索語句 j の広告枠 s を獲得するとき $x_{i,j,s} = 1$ となり、そうでないなら $x_{i,j,s} = 0$ となる変数である。例えば広告主 A が「コーヒー」という検索語句の第2枠目を獲得するなら $x_{A, \text{コーヒー}, 2} = 1$ であり、それ以外の広告主、例えば広告主 B については $x_{B, \text{コーヒー}, 2} = 0$ になる。広告主 i の検索語句 j の

枠 s に対する支払額は $p_{i,j,s}$ で表され、広告主 i の支払額の総和は $p_{i,j,s}$ をすべての検索語句 j と広告枠 s について足し合わせて $P_i = \sum_{j,s} p_{i,j,s}$ で計算できる。そして広告主の利得は分配された広告枠の評価値の総和と支払額の総和と予算による関数で決まるとする。

このようなモデルの下で、Azar et al. (2008) はさらにオークションの勝者が支払う額はあらかじめ分かっている (勝者の入札額と同じか、なんらかのコストとして定まっている) という仮定を追加し、検索エンジンが広告主 i から得られる利潤は $r_i = \min\{B_i, \sum_j p_{i,j} x_{i,j}\}$ で表されるとした。そして検索エンジンが利潤 $\sum_i r_i$ を最大化するように $x_{i,j}$ を決定するとすると、この問題は NP 困難だけでなく APX 困難であることを示した。

また Ashlagi et al. (2010) や Laan et al. (2016)、Kempe et al. (2009) などは検索語句が 1 個しかなく ($m = 1$)、評価値や予算に関する情報が私的情報である (自分の情報しかわからない) として、新しいオークションのルールを提案したり、そのルールの下で得られる均衡がどのように望ましい性質を持っているかを議論したりした。

広告主が合理的でない場合 広告主が合理的であるとは、「広告主がオークションメカニズムについてきちんとした知識を持っている」「利得が明確に定義されている」「オークションに参加する他の広告主について知っている」「競争相手の戦略を正確に推測できる」「自らの利得を最大化するために必要な情報をすべて考慮に入れることができる」などの仮定が満たされることである。2.1 節で定義した基本モデルでは、広告主は合理的であるとしていた。しかし実際には合理性の仮定は満たされないことが多く、例えばプライバシーなどの観点から他の広告主の情報にアクセスすることが制限されていたり、オークションのメカニズムの詳細については知らされていなかったり、最適な入札をすることを阻害する要素 (例えば予算制約や情報収集のコスト、機会費用など) があったりする。このような状況で合理性を満たさない広告主の行動をモデル化するアプローチがあり、その多くは実際のオークションの履歴のデータを用いて行われている。

例えば Pin and Key (2011) は広告主が他の広告主の入札額の分布を知っているという仮定の下で、広告主が自らの期待利得を最大化するように行動するというモデルを提案した。そしてこのモデルの下で広告主の入札額と広告主の評価値との関係についての必要条件を導出し、広告主の評価値や将来的な入札の予測に活用できるとした。他にも広告主の合理

性を実際のオークションデータからある観点で学習してパラメータとして用いたり、広告主が自分の情報だけに基づいて確率的に入札を変更するものと仮定したりするなど、様々なアプローチが取られている。

広告主が入札額以外の情報を表明する場合 2.1 節で定義した基本モデルでは、広告主は「自分の広告が表示された場合にいくらまでなら支払ってもよいか」を入札額として表明するとした。しかし理論研究の中には、入札額以外の情報を検索エンジンに対して表明できるとする分析もある。

例えば広告主が「自分の広告が表示されてもよいと考える広告枠の順位の範囲」を表明できるという分析 (Aggarwal et al., 2006)、「自分の広告と他の広告との位置関係」を表明できるという分析 (Constantin et al., 2011)、自分の広告が表示された場合・クリックされた場合・クリックされてその先のサイトでユーザーがアクションした場合など様々な場合に依じて支払ってもよい額を表明できるという分析 (Goel and Munagala, 2009; Edelman and Lee, 2008) などがある。

3 Broad match に対応するモデル

本章では、数あるキーワードオークションの基本モデルの拡張の中でも特に、Broad match に対応する 2 つのトピックを取り上げ、その特徴について紹介する。

3.1 代理入札を行うモデル

本節では Amaldoss et al. (2016) が提案した、広告主に代わって検索エンジンが入札を行うモデルを紹介する。Amaldoss et al. (2016) は広告主は 2 人 ($n = 2$) で広告枠が 1 つ ($k = 1$) あり、広告主の評価値 v_i は独立に $[0, 1]$ の一様分布に従うとし、検索エンジンは留保価格 R 付きの GSP オークションを行うという状況を設定した。ここでいう留保価格 R とは検索エンジンが「2 人の広告主の入札額が R を下回る場合は広告枠を売らない」と宣言する価格のことである。そしてこの状況において、広告主はあるコストを支払って自分で自分の入札額を決定し入札するか、コストを支払わずに検索エンジンに代理入札を頼むかを選ぶことができた。Amaldoss et al. (2016) は前者が Exact match に対応しており後者が Broad match に対応しているとし、さらに検索エンジンは Broad match

の精度(どれくらい広告主の評価値に沿った入札を行うか)を調整できるとした。Amaldoss et al. (2016) が設定するこのモデルでは、広告主と検索エンジンとの間で Broad match の精度の向上に関して利益が一致しておらず、検索エンジンは広告主が Broad match を選ぶようになる最低限の精度までしか、精度を向上させる誘因を持っていないという特徴がある。Amaldoss et al. (2016) が定式化した本オークションのモデルは以下のとおりである。

広告主が自ら入札額を決定する場合 (Exact match)、自分の入札額を調整するために広告主には 0 より大きいある c という値のコストが発生する(このコストは 2 人の広告主に共通である)。したがって広告主 v_i がオークションに勝って p_i を支払ったとすると、その利得 u_i は

$$u_i = v_i - p_i - c$$

となる⁷。一方オークションに負けて広告枠を得られなかったとしても入札額を調整するコストは発生するので、負けた広告主の利得は $-c$ になる。もしこのオークションに参加しないという選択を取った場合の利得を 0 とすると、Exact match しかないオークションでは正直入札 ($b_i = v_i$) が支配戦略になる (Amaldoss et al., 2016, Lemma 1)。

検索エンジンが代理入札を行う場合 (Broad match)、広告主は入札額を調整する必要がないので、調整コスト c を 0 にできる。しかし検索エンジンは広告主たちの正しい評価値を知らないため、検索エンジンが広告主 i のために選ぶ入札額を b'_i とすると、 $b'_i = v_i + \epsilon$ となってしまう。ここで ϵ は $[-E, E]$ の一様分布に従う値である。すなわち検索エンジンに代理入札を頼むと、コストを削減できる代わりに評価値をそのまま入札することができず、 ϵ で表される入札額のずれが発生するのである。

このモデルでは、オークションは次のような 4 つのステージによって構成される。第 1 ステージでは、検索エンジンが留保価格 R の値を決定する。第 2 ステージでは、2 人の広告主が同時に Exact match を使うか、Broad match を使うかを選択する。その後 2 人の広告主は自らの評価値 v_i がどのような値であるかを知る。そして第 3 ステージで、前ステージで Exact match を選択した広告主はさらにオークションに参加するか否かを選択する。Broad match を選択した広告主はなにもしない。第 4 ステージでは、留保価格 R 付き GSP オークションが実施され、広告枠がどちらの広告主に割り当てられるかと支払い額がいくらになるかが決定さ

⁷このモデルでは広告枠が 1 つしかないので広告枠の CTR を考慮していない。

れる。Exact match を選択した広告主 i の入札値は $b_i = v_i$ になり、Broad match を選択した広告主 j の入札値は $b_j = v_j + \epsilon$ になる。

Amaldoss et al. (2016) によれば、Broad match の精度が十分低いとき (すなわち E が大きいとき) には両広告主が Exact match を使うことがナッシュ均衡になり、Broad match の精度が十分高いとき (すなわち E が小さいとき) には両広告主が Broad match を使うことがナッシュ均衡になる。そしてこれらの均衡はどちらも両広告主の期待利得を高めるものである。Broad match の精度が中くらいのときは、両広告主が Exact match を選択するナッシュ均衡と Broad match を選択するナッシュ均衡という 2 種類の均衡があり、そしてどちらの均衡においても期待利得が下がるという囚人のジレンマ的状況が発生している。一方コスト c が十分に高いときは、Broad match の精度 E の大小にかかわらず両広告主は Broad match を選択することがナッシュ均衡になる。さらに留保価格に注目すると、Broad match が選択されることによって検索エンジンが選ぶ最適な R は上昇し検索エンジンの利潤も増加するが、両広告主が Broad match を選択するナッシュ均衡においては検索エンジンの利潤は E の減少関数⁸ になるという。したがって検索エンジンは両広告主が Broad match を選択するようになる程度まで Broad match の精度を上げる (つまり E を小さくする) が、それ以上精度を上げることはない (Amaldoss et al., 2016, Proposition 3)。

3.2 グループピングを行うモデル

本節では Dhangwatnotai (2011) が提案した、複数の検索語句がある状況でそれらをグループピングするモデルを紹介する。このグループピングを行うモデルも一度の入札で複数の検索語句に入札できるという意味で、Broad match に対応したモデルと言える。グループピングを用いることによって広告主は個々の検索語句に対する入札額を考える手間を減らすことができ、検索エンジンは取り扱う入札額の個数を減らすことができる。このモデルにおいてグループピングという方法を導入するかどうか、またどのような検索語句をグループにまとめるかを決定するのは検索エンジンであるが、Dhangwatnotai (2011) によればこのグループピングを導入して達成できる社会余剰にはある範囲があり、その中で検索エンジンが広

⁸減少関数とは、例えば $y = f(x)$ という関数において x が増えると y が減るような関数のこと。検索エンジンの利潤が E の減少関数であるとは、 E が増えると検索エンジンの利潤が減るという状況になっていることを表す。

告主のために適切にグルーピングを行おうとしても、他方を考慮すると他方が損なわれるというトレードオフが発生してしまうため、最適なグルーピング方法は見つかっていない。Dhangwatnotai (2011) が定式化した本オークションのモデルは以下のとおりである。

広告主は n 人で検索語句は m 個 (m は有限だが非常に大きいとする) あり、それぞれの検索語句について広告枠が 1 つずつある。そしてこの状況で広告主 i は各検索語句 j に対して評価値 $v_i(j)$ を持っており、複数の検索語句の集合を A と表すと、 A に対する評価値は A に含まれるすべての検索語句についてその評価値を足し合わせたものであり、 $v_i(A) = \sum_{j \in A} v_i(j)$ と計算できる。

Dhangwatnotai (2011) はこの状況において、検索エンジンが複数の検索語句をオークション開始前にグルーピングするモデルを導入した。検索エンジンは事前に検索語句をいくつかのグループにまとめる。このグループには何個の検索語句が含まれていてもよく、1 つの検索語句が複数のグループに含まれていてもよいが、どの検索語句も少なくとも 1 つのグループに含まれているようにする。すなわち m 個の検索語句の集合を T 、検索エンジンが定めるグループ 1 つ 1 つを $K_1, K_2, \dots$ 、そのグループの集合を $\mathcal{K} = \{K_1, K_2, \dots\}$ で表すと、

$$\bigcap_{K_l \in \mathcal{K}} K_l = T$$

が成り立つ。

検索エンジンが $\mathcal{K}$ を決めた後、各広告主は検索語句に対してではなく、各グループに対して入札を行う。ただし 1 人の広告主が入札できるグループの個数は κ までとなっている。すなわちこのモデルにおける広告主の入札は $b_i(K_l)$ というように「グループ K_l に対する入札額」という形で表され、 $b_i(K_l) > 0$ となるグループ K_l の個数は κ 以下になっている。そして広告主たちがグループに対して入札を行った後、検索エンジンはそれらの入札額を各検索語句に対する入札額に変換する。その際はある検索語句 j に対する入札額 $b_i(j)$ が、検索語句 j が含まれているグループに対する入札額のうち、最も大きい値になるように変換する。この変換を式で表すと、

$$b_i(j) = \max_{K_l: j \in K_l} b_i(K_l) \quad (3)$$

となっている。そしてこの変換された入札額に基づいて、検索エンジンは VCG ルールに基づいてオークションを行い、各検索語句に 1 つずつある広告枠をどの広告主が獲得し、いくら支払うかを決定する。

Dhangwatnotai (2011) はこのモデルにおいて、「各グループに含まれる検索語句がどれくらい似ているか」を表す homogeneity という指標と、「入札個数制限内でどの程度入札したい検索語句に入札できるか」を表す expressiveness という指標を定義し、これらの指標によって本オークションの社会余剰を表すことができることを示した。また広告主たちが支配される戦略を取らないという仮定の下で、ナッシュ均衡における社会余剰の範囲を示すとともに、homogeneity と expressiveness の間にトレードオフがあることも示した。つまり検索エンジンがグループを決める際に、広告主たちがよりたくさん入札したい検索語句に入札できるようにしようとする、各グループはあまり似ていない検索語句の集まりになってしまうということである。

中川 (2021) は Dhangwatnotai (2011) の導入したグルーピングを用い、広告主は 2 人で検索語句は m 個、広告枠は各検索語句につき 2 つずつあるとして分析を行った。中川 (2021) はある検索語句 j の第 1 枠の CTR を θ_{1j} 、第 2 枠の CTR を θ_{2j} と置き、2 つの枠の CTR の差を $\delta^j : \theta_{1j} - \theta_{2j}$ とした。さらに Dhangwatnotai (2011) 同様広告主たちは検索語句のグループに対して入札を行うが、入札できる個数に制限はなく、広告主たちは支配される戦略も取り得るとした。そして入札額の変換方法は Dhangwatnotai (2011) と同じく式 (3) であり、オークションルールも Dhangwatnotai (2011) 同様 VCG ルールであるとした。

中川 (2021) はこのモデルを分析する上で、あるグループ K_l に含まれる検索語句に対する、広告主 i の評価値の加重平均値 (以降 K_l の WAV と呼ぶ) を定義した。加重平均の重みは各検索語句の第 1 枠と第 2 枠の CTR の差である δ^j であり、 K_l の WAV を $\text{WAV}_i^{K_l}$ とすると、 $\text{WAV}_i^{K_l} = \frac{1}{\sum_{j \in K_l} \delta^j} \sum_{j \in K_l} \delta^j v_i(j)$ と表すことができる。すなわちあるグループに対する広告主 i の WAV とは、広告主 i の各検索語句 j に対する評価値 $v_i(j)$ に δ^j を掛け、グループに含まれるすべての検索語句についてそれらを足し合わせたのち、グループに含まれるすべての検索語句の δ^j の和で割った値である。

中川 (2021) はグループが 1 つしかないとき、すなわちすべての検索語句が 1 つのグループにまとめられているとき、その唯一のグループの WAV を入札することが各広告主にとって支配戦略であることを示した。またすべての検索語句を 1 つのグループにまとめたときの支配戦略均衡における検索エンジンの利潤が、検索語句をまとめずに個別に VCG オークションを行ったときの支配戦略均衡における検索エンジンの利潤と比べ

て高くなることを明らかにした。すなわちグルーピングを導入するかどうか決定する検索エンジンにとってはグルーピングを導入した方が良い。ただし検索エンジンの利潤と広告主の利得との間にはトレードオフがあるため、検索エンジンの利潤が増えれば広告主の利得は減る。また中川 (2021) はこのほかにもグループが2つの場合についても分析を行っているが、グループの個数が増えるほど検索エンジンの利潤が増える、という傾向があるかどうかは明らかになっていない。

4 おわりに

本稿のまとめ 本稿では、キーワードオークションとはどのようなオークションであるかを説明し、基本モデルを定義したうえでその特徴を整理した。そして理論研究の文献レビューを通して、基本モデルの拡張によってモデルの特徴がどのように変化するかを紹介した。第1章ではキーワードオークションの対象である検索連動型広告とは何かを説明し、キーワードオークションのルールについて説明した。続く第2章ではキーワードオークションの基本的なモデルを定式化し、基本的なモデルの特徴として、正直入札が支配戦略であるということや、ナッシュ均衡の代わりに分析に用いられる LEF 均衡を紹介した。そして基本的なモデルを拡張した場合にその特徴がどのように変化するかも議論した。第3章では、キーワードオークションの拡張の一種である Broad match に対応する2つのモデルとして、Amaldoss et al. (2016) が提案した検索エンジンが代理入札を行うモデルと、Dhangwatnotai (2011) が提案した検索エンジンが事前に検索語句のグループを指定しそのグループに対して入札をさせるモデルを紹介した。代理入札を行うモデルでは、入札額の調整コスト c と代理入札の際の入札額のずれ ϵ との間にトレードオフが存在し、このモデルでは検索エンジンは広告主たちが代理入札を選択するレベルまで代理入札の精度を上げるが、それ以上上げてしまうと利潤が下がるので、ある程度までしか精度が上がらないことが均衡になっていた。Dhangwatnotai (2011) が提案したグルーピングを行うモデルでは、Dhangwatnotai (2011) によってグルーピングに関する2つの指標 (homogeneity と expressiveness) によってオークションにおける社会余剰を表せるが2つの指標の間にトレードオフがあることが示され、中川 (2021) によって広告主が2人の状況ではグルーピングを行いかつグループを1つにする方が、グルーピングをせず個別に入札を行うよりも検索エンジンの利潤が高まることが示された。

今後の展望 本稿で紹介した理論研究はほんの一部であるが、そのほとんどが経済学、特にゲーム理論やオークション理論という分野の研究である。本稿で紹介していない理論研究の中には計算機科学や機械学習といった分野での理論研究によるものが多く、それらの理論研究でどのような成果が得られているかについてもまとめて整理する必要がある。また現実のキーワードオークションで具体的にどのようなメカニズムが用いられているかは明らかになっていない点が多く、したがってメカニズムデザインなどの理論研究で得られた成果が現実のキーワードオークションの結果や広告主の行動を描写しきれていないという問題もある。キーワードオークションに関する実務上の課題について、理論研究が何らかの指針を提示できるよう、より適切なモデルの構築や分析方法の発見が必要である。

参考文献

- Aggarwal, Gagan, Jon Feldman, and Shanmugavelayutham Muthukrishnan (2006) “Bidding to the top: VCG and equilibria of position-based auctions,” in *International workshop on approximation and online algorithms*, pp. 15–28, Springer.
- Aggarwal, Gagan, Jon Feldman, Shanmugavelayutham Muthukrishnan, and Martin Pál (2008) “Sponsored search auctions with markovian users,” in *International Workshop on Internet and Network Economics*, pp. 621–628, Springer.
- Amaldoss, Wilfred, Kinshuk Jerath, and Amin Sayedi (2016) “Keyword management costs and “broad match” in sponsored search advertising,” *Marketing Science*, Vol. 35, No. 2, pp. 259–274.
- Ashlagi, Itai, Mark Braverman, Avinatan Hassidim, Ron Lavi, and Moshe Tennenholtz (2010) “Position auctions with budgets: Existence and uniqueness,” *The BE Journal of Theoretical Economics*, Vol. 10, No. 1.
- Attenberg, Josh, Sandeep Pandey, and Torsten Suel (2009) “Modeling and predicting user behavior in sponsored search,” in *Proceedings of the*

- 15th ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining*, pp. 1067–1076.
- Azar, Yossi, Benjamin Birnbaum, Anna R Karlin, Claire Mathieu, and C Thach Nguyen (2008) “Improved approximation algorithms for budgeted allocations,” in *International Colloquium on Automata, Languages, and Programming*, pp. 186–197, Springer.
- Clarke, Charles LA, Eugene Agichtein, Susan Dumais, and Ryen W White (2007) “The influence of caption features on clickthrough patterns in web search,” in *Proceedings of the 30th annual international ACM SIGIR conference on Research and development in information retrieval*, pp. 135–142.
- Constantin, Florin, Malvika Rao, Chien-Chung Huang, and David Parkes (2011) “On expressing value externalities in position auctions,” in *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*, Vol. 25, pp. 644–649.
- Dembczynski, Krzysztof, Wojciech Kotlowski, and Dawid Weiss (2008) “Predicting ads clickthrough rate with decision rules,” in *Workshop on targeting and ranking in online advertising*, Vol. 2008.
- Deng, Xiaotie and Jiajin Yu (2009) “A new ranking scheme of the GSP mechanism with Markovian users,” in *International Workshop on Internet and Network Economics*, pp. 583–590, Springer.
- Dhangwatnotai, Peerapong (2011) “Multi-keyword sponsored search,” in *Proceedings of the 12th ACM conference on Electronic commerce*, pp. 91–100.
- Edelman, Benjamin, Michael Ostrovsky, and Michael Schwarz (2007) “Internet advertising and the generalized second-price auction: Selling billions of dollars worth of keywords,” *American Economic Review*, Vol. 97, No. 1, pp. 242–259.
- Edelman, Benjamin G and Hoan Lee (2008) “CPC/CPA hybrid bidding in a second price auction,” *Harvard Business School NOM Unit Working Paper*, No. 09-074.

- Fotakis, Dimitris, Piotr Krysta, and Orestis Telelis (2011) “Externalities among advertisers in sponsored search,” in *International Symposium on Algorithmic Game Theory*, pp. 105–116, Springer.
- Ghosh, Arpita and Mohammad Mahdian (2008) “Externalities in online advertising,” in *Proceedings of the 17th international conference on World Wide Web*, pp. 161–168.
- Giotis, Ioannis and Anna R Karlin (2008) “On the equilibria and efficiency of the GSP mechanism in keyword auctions with externalities,” in *International workshop on internet and network economics*, pp. 629–638, Springer.
- Goel, Ashish and Kamesh Munagala (2009) “Hybrid keyword search auctions,” in *Proceedings of the 18th international conference on World Wide Web*, pp. 221–230.
- Kempe, David, Ahuva Mu’alem, and Mahyar Salek (2009) “Envy-free allocations for budgeted bidders,” in *Internet and Network Economics: 5th International Workshop, WINE 2009, Rome, Italy, December 14–18, 2009. Proceedings 5*, pp. 537–544, Springer.
- van der Laan, Gerard, Zaifu Yang et al. (2016) “An ascending multi-item auction with financially constrained bidders,” *Journal of Mechanism and Institution Design*, Vol. 1, No. 1, pp. 107–147.
- Pandey, Sandeep and Christopher Olston (2006) “Handling advertisements of unknown quality in search advertising,” *Advances in neural information processing systems*, Vol. 19.
- Pin, Furcy and Peter Key (2011) “Stochastic variability in sponsored search auctions: observations and models,” in *Proceedings of the 12th ACM conference on Electronic commerce*, pp. 61–70.
- Qin, Tao, Wei Chen, and Tie-Yan Liu (2015) “Sponsored search auctions: Recent advances and future directions,” *ACM Transactions on Intelligent Systems and Technology (TIST)*, Vol. 5, No. 4, pp. 1–34.
- Varian, Hal R (2007) “Position auctions,” *International Journal of Industrial Organization*, Vol. 25, No. 6, pp. 1163–1178.

Xu, Wanhong, Eren Manavoglu, and Erick Cantu-Paz (2010) “Temporal click model for sponsored search,” in *Proceedings of the 33rd international ACM SIGIR conference on Research and development in information retrieval*, pp. 106–113.

電通 (2023) 「2022 年 日本の広告費 インターネット広告媒体費 詳細分析」, URL: <https://www.dentsu.co.jp/news/release/2023/0314-010594.html> (アクセス日: 2024 年 3 月 8 日).

中川彩野 (2021) 「複数キーワードオークションにおける均衡分析—2 人の広告主の入札値が同じケース—」, 『日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌』, 第 64 巻, 204–228 頁.