第４章　季節調整手法

４．１　季節調整の考え方

経済統計データの変動要因

指数も含めた経済統計の時系列データ[1]の変動は、一般的に次の４種類の要素から成り立っていると考えることができます。

①	傾向（すう勢）変動	Trend	T
②	循環変動	Cycle	C
③	季節変動	Seasonal	S
④	不規則変動又は偶発変動	Irregular	I

①の傾向変動は、すう勢として一方的な方向を持続する変化ですが、周期 15 年以上の長期的な波動も含むことがあります。②の循環変動は、通常３年から 15 年までの周期の確定していない波動や、あるいはもっと短期間での景気の好･不況を含みます。傾向変動と循環変動をあえて区別せず、傾向・循環変動としてしばしばひとまとめにすることもあります。

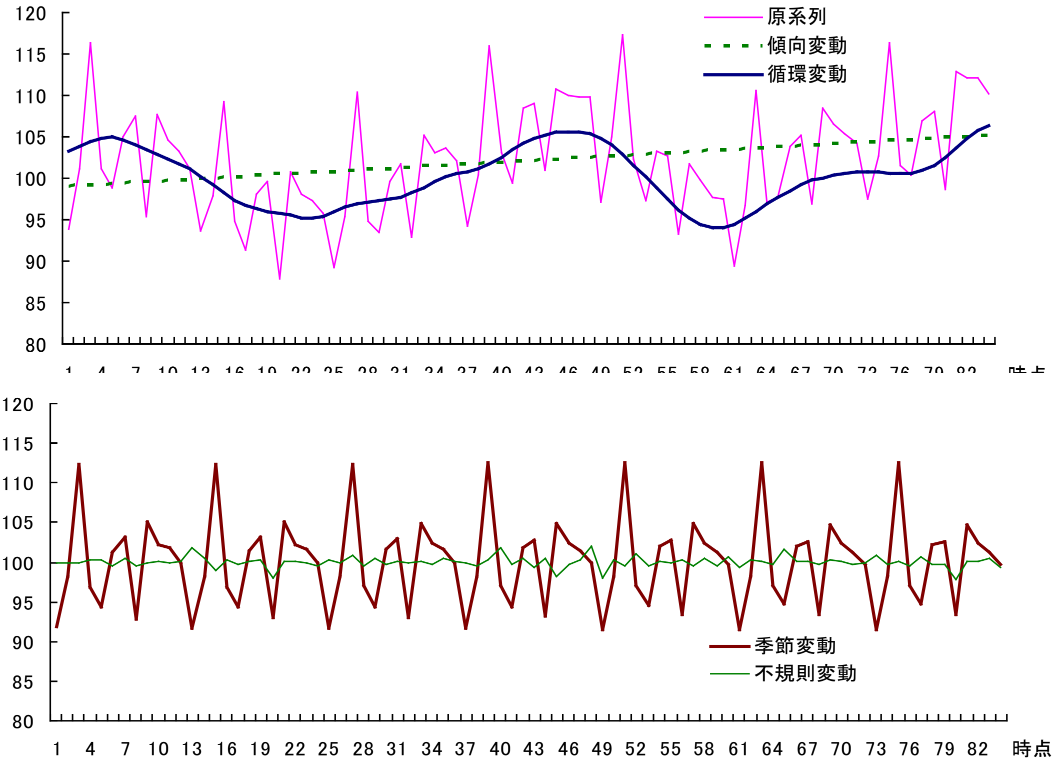
一方、③の季節変動は１年を周期とする定期的な波動です。また、曜日構成の違いによる変動や祝祭日の日数、うるう年など、必ずしも１年周期ではないものの、あらかじめわかっている変動も含まれています。④の不規則変動は短期間に起きる不規則な動きで、突発的な駆け込み需要や特需などはこれに含まれます。計算上では、上記３つの変動の残差として捉えられます。経済統計データの分析を行う際には、この４種類の変動要素を単独で摘出したり、除去したりすることがしばしばあります。

指数は経済分析の道具として様々な形で利用され、中でも重要な利用目的は短期的な動向観察です。生産指数を始めとする各種数量指数は景気動向を判断し、更にその先行きを占うために、極めて有効に使われています。

しかし、短期的な動向を観察する上では、１年を周期として繰り返される季節変動が含まれていると、足下の動きが毎年の定期的な動きなのか、それとも特異な動きなのかが判断できません。そこで毎年の定期的な変動を除去することにより、分析が容易になります。

[1] データを過去から未来といった時間の順序に並べたデータ。（英：time series data）

第４－１図　時系列の分解



変動要素の組合せと季節調整

次にこれら４種類の変動が、もとの時系列においてどのような組合せとなっているかを考えます。もとの系列を原系列と呼び、これを O (Original)で表すと、代表的なモデルとして、

(1)　乗法モデル：原系列が各変動の積で構成されたもの

$$O = T \times C \times S \times I$$

(2)　加法モデル：原系列が各変動の和で構成されたもの

$$O = T + C + S + I$$

が挙げられます。我が国の生産指数をはじめとする経済統計データは、乗法モデルの方が適合するとの考え方が一般的になっています。これは、経済統計データの各変動は水準が高くなるのに比例して、各変動の振幅も増幅すると考えるのが現実的であるからです。これらの条件にどうしても当てはまらないと考えられる場合には、加法モデルが用いられることもあります。

そして、指数を始めとする経済統計データから、季節変動を除去することを「季節調整」と言います。除去の考え方は、季節調整後の系列を TCI、季節要素を S とすると、乗法モデルと加法モデルとでは以下のようになります。

(1)　乗法モデル：

TCI ＝ O÷S

(2)　加法モデル：

TCI ＝ O－S

こうして季節調整を行った系列は、「季節調整済系列」と言い、特に指数の場合は「季節調整済指数」と言います。季節変動を求める一般的な手法は、過去の実績系列から典型的な季節パターンを摘出します。この季節変動の求め方、季節調整の仕方は、項を変えて改めて解説します。

季節変動の要因

季節変動の要因にはいろいろなものがありますが、大まかに①天候の要因、②暦の要因、③社会的慣習の要因、④予測の要因、と分けることができます。

①天候の要因は、季節による寒暖や降水量などです。例えば、エアコン、ビールや清涼飲料は夏場が需要のピークであり、生産もそれに合わせて行われます。一方で、灯油は暖房用が主なものとなることから、冬場にピークを迎えます。

②暦の要因は、１月の 31 日から 12 月の 31 日まで、月によって決まっている平日、休日の日数などです。これらは工場の稼働日数を決定することから、生産活動に影響を与えます。

③社会的慣習の要因は、制度や風習などの社会的な慣習です。例えば我が国では３月決算の企業が多いことから、３月の生産は上昇する傾向にあります。またボーナスやクリスマスは消費が活発となります。ほかには、中国の春節のように部品供給、製品の最終消費地となる他国の社会的慣習が影響を与えるケースもあります。

最後の④予測の要因は、上記３つの要因を予測して、あらかじめ生産を行うことです。クリスマス商戦を見据えた生産は 12 月ではなく秋口から行われます。また、夏場、冬場に需要期を迎える製品は、その数か月前から生産を行い、在庫を積み増します。

季節変動は以上のような様々な要因の影響を受けて、品目ごとに固有の変動を持っています。そして品目を総合した業種別あるいは総合指数も季節的な変動を持ちます。

ただし、総合指数は品目別指数とは違い、その変動要因をはっきりとは特定できない場合が多くなります。個々の季節変動が互いに相殺、あるいは相乗しあった結果が、総合指数の季節変動になるからです。

４．２　季節調整方法の種類

経済産業省を始めとする各官庁や日本銀行などでは、センサス局法という季節調整方法が使用されています。これは高性能化したパソコンの使用を前提とした複雑な計算工程を持つものです。

一方で、手計算の時代は以下のような手法が広く使われていました。これらは季節変動のしくみを考える上で参考となり、また電卓で簡単に計算できることから簡便的に季節調整済系列を得られるため、参考として紹介します。

４．２．１　計算方法

月別平均法

これは、月次ごとの値の平均をとり、それを季節変動とする方法です。月別平均値はそのまま季節典型値となり、この総平均値を 100 として月別平均値を指数化すれば季節変動が得られます。

次表は、あるデータについて月別平均法による季節変動を計算したものです。

第４－１表　月別平均法の計算

	1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月	合計	修正係数
2013	108.5	117.0	125.3	111.0	108.7	115.9	117.9	101.2	116.9	111.7	100.6	93.7		
2014	76.6	73.5	84.3	77.7	77.3	89.3	91.3	82.3	96.1	95.7	96.6	97.6		
2015	88.8	94.7	108.9	96.2	92.1	103.9	104.8	95.7	108.4	100.3	103.2	102.9		
2016	92.7	98.5	94.4	83.3	87.4	102.4	102.1	96.7	105.1	101.8	100.7	101.0		
2017	92.8	101.5	110.1	95.9	94.0	101.8	102.2	92.7	97.1	97.0	95.2	93.3		
月別平均	91.9	97.0	104.6	92.8	91.9	102.7	103.7	93.7	104.7	101.3	99.3	97.7	1181.3	1.01586
季節指数	93.3	98.6	106.3	94.3	93.4	104.3	105.3	95.2	106.4	102.9	100.8	99.2		

※　季節要素は指数化し、季節指数としている。以下同じ。

①　過去複数年（ここでは５年間）の月別平均値を出します。

②　月別平均値の合計を求めます。

91.9＋97.0＋…………＋97.7＝1181.3

③　上記の計算では、合計が 1200 より小さくなっています。これは元のデータが下方トレンドを持っているためです。これをそのまま季節要素として使用すると、季節調整系列が上方修正されてしまいます。そこで、合計で 1200 を除して修正係数を作成します。

1200.0÷1181.3＝1.01586

④　月別平均に、修正係数を乗じます。これで季節要素を計算できます。

月別平均法は、計算は簡単でしくみも理解しやすいのが利点です。一方、欠点と

しては①単純な平均のため、直近年になるに従い季節変動のパターンが変化してもそれはうまく反映されない、②季節変動と他の変動との比例的関係を考えないで、単純に算術平均の方法で処理しているため、系列が乗法モデルの場合、傾向変動や循環変動が大きいときに影響が強く出る、といったことが挙げられます。

連環比率法

月別平均法が各月の水準の平均を使うのに対し、前月比の平均を使用することにより乗法モデルに適用しようとする方法です。アメリカの統計学者パーソンズ(W.M.Persons)が考案したのでパーソンズ法とも言います。月別平均法と同じ時系列データによってその計算の手順を以下に示します（適宜 100 倍あるいは 100 分の 1 にしている部分がありますが、第 1 章と同様、特に注記はしていません)。

第４－２表　連環比率法の計算

	1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月	1月	修正係数
2013		7.8	7.1	-11.4	-2.1	6.6	1.7	-14.2	15.5	-4.4	-9.9	-6.9		
2014	-18.2	-4.0	14.7	-7.8	-0.5	15.5	2.2	-9.9	16.8	-0.4	0.9	1.0		
2015	-9.0	6.6	15.0	-11.7	-4.3	12.8	0.9	-8.7	13.3	-7.5	2.9	-0.3		
2016	-9.9	6.3	-4.2	-11.8	4.9	17.2	-0.3	-5.3	8.7	-3.1	-1.1	0.3		
2017	-8.1	9.4	8.5	-12.9	-2.0	8.3	0.4	-9.3	4.7	-0.1	-1.9	-2.0		
月別平均	-9.5	6.9	10.1	-11.6	-1.5	12.2	1.0	-9.3	12.5	-2.6	-0.7	-0.7		
連環比率	100.0	106.9	117.7	104.0	102.4	114.9	116.0	105.2	118.4	115.3	114.5	113.7	102.9	1.00239
調整値		1.002	1.005	1.007	1.010	1.012	1.014	1.017	1.019	1.022	1.024	1.027		
調整後連関比率	100.0	106.6	117.1	103.3	101.4	113.5	114.4	103.5	116.2	112.8	111.8	110.8		0.91507
季節指数	91.5	97.6	107.2	94.5	92.8	103.9	104.6	94.7	106.3	103.3	102.3	101.4		

① 第４－２表から、毎月の数値の前月比を計算します（2013 年２月の前月比＝117.0÷108.5＝7.8)。これは第 1 章で説明した連環指数(連環比率)です。

② 各月別に前月比の平均値を求めます。これが各月の典型値です。この際、異常な動きを特異項[2]として除くために、月ごとに最大値と最小値(表中網掛けした値)を除外して平均しています。なお、他のやり方として、月ごとの中位数をとることもあります。

③ 前月比を月別の連関比率に直します。１月を 100 として前月比の典型値を順々に乗じます。

１月………100.0

２月………100.0×106.9　＝　106.9

３月………106.9×110.1　＝　117.7

[2] 特異項とは、小きざみで偶発的な不規則変動ではなく、平均によってならすことのできない例外的な変動をいう。

:

11 月 ………115.3×99.3　＝ 114.5

12 月 ………114.5×99.3　＝ 113.7

④　この 12 月の 113.7 に、1 月の前月比の典型値を乗じます。この値は本来ならば１月の基準値 100 に戻らなければならないのですが、実際は 113.7×90.5＝102.9 となります。この 2.9 は傾向変動です。前月比には傾向変動が含まれており、それが連乗で顕在化したものです。

⑤　そこで、この傾向変動を取り除く作業を行います。まず $\sqrt[12]{1.029}$ ＝1.00239 として、１か月分の変動に直します。

⑥　次に２月から順に

106.9÷ 1.00239　＝ 106.6

117.7÷$(1.00239)^2$＝ 117.7

:

113.7÷$(1.00239)^{11}$＝110.8

とし、傾向変動分を取り除きます。

⑦　以上の方法で修正した調整後連関比率を、月別平均法と同じやり方で年平均 100 になるように調整し季節指数とします。

連環比率法は、月別平均法に比べ次のような長所があります。

①　以上の方法では、月ごとに最大値と最小値を除外あるいは中位数の使用によって特異項の影響を避けることができます。

②　系列の途中に断層のある統計に対しても、使用することができます。例えば途中で調査の範囲が変化しても、季節変動のパターンに大きな変化がない場合には、断層部分の数値を除外して計算すれば断層の影響を受けません。

③　この方法は乗法モデルに適用でき、極めて広範囲の系列に使うことができます。

12 か月移動平均法

月別平均法の欠点を補い、乗法モデルへ適用可能とした方法に、12 か月移動平均法があります。移動平均には、一定周期の波動を含む時系列においてその周期と同じ期間の移動平均値を計算すれば、その波動が除去される性質があります。季節変動は 12 か月を周期とする波動ですから、原系列から 12 か月移動平均値を求めれば季節変動は除去されることになります。

そうなると、12 か月移動平均値そのもので動向観察を行えば良いということになりますが、これには３つの欠点があります。

第１に、移動平均は不規則変動を除去し、更には循環変動の山や谷もならしてしまいます。不規則変動を除去することは、その月ごとの個別の特異な動きをみようとす

る際には支障が出ますし、循環変動をならして歪みをもたらすことには問題があります（移動平均の使い方は第５章で説明します）。

第２に、移動平均値は系列の最初と最後に欠項が生じることです。特に最後の数か月の数値が求められないということは、最近時点の動向観察の際には極めて不便となります。

第３に、移動平均による平均値はその期間の中央時点の値とみなされるので、偶数月の移動平均は月と月の間の時点の値となってしまいます。例えば 2013 年１月から 2013 年 12 月までの移動平均値は、2013 年 6.5 月の値となり、2013 年２月から 2014 年１月までの移動平均値は 2013 年 7.5 月の値となります。そのため、このままではある月の値をみることができません。

そこで、移動平均で季節変動を求める場合は、以下のとおりいくつかの手順を踏みます。

① 原系列の 12 か月移動平均値を計算します。移動平均による平均値は、その期間の中央時点の値とみなされるので、12 か月の偶数月の平均をとると、その値は６か月目と７か月目の中間点のものとなります。

第４－３表　12 か月移動平均法の計算

	0.5月	1.5月	2.5月	3.5月	4.5月	5.5月	6.5月	7.5月	8.5月	9.5月	10.5月	11.5月
2013							110.7	108.0	104.4	101.0	98.2	95.6
2014	93.4	91.2	89.6	87.9	86.5	86.2	86.5	87.5	89.3	91.4	92.9	94.1
2015	95.4	96.5	97.6	98.6	99.0	99.6	100.0	100.3	100.6	99.4	98.4	98.0
2016	97.8	97.6	97.7	97.4	97.5	97.3	97.2	97.2	97.4	98.7	99.8	100.3
2017	100.3	100.3	100.0	99.3	98.9	98.4	97.8					

② 次に隣接する２つの平均値どうしを平均します。これは、１か月多い 13 か月の期間で平均を求める際に、最初（１か月目）と最後（13 か月目）の値に２分の１を乗じた上で平均を求めた結果と同じになります（加重移動平均）。この結果、各年月の移動平均値を得ることができます。ただし、上述したとおり最初の６か月と最後の６か月に欠項が生じます。このように、隣り合わせの平均値をさらに平均することを中心化移動平均と呼びます。

第４－４表　中心化移動平均

	1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月
2013							109.4	106.2	102.7	99.6	96.9	94.5
2014	92.3	90.4	88.8	87.2	86.4	86.4	87.0	88.4	90.4	92.2	93.5	94.8
2015	96.0	97.1	98.1	98.8	99.3	99.8	100.2	100.5	100.0	98.9	98.2	97.9
2016	97.7	97.7	97.6	97.5	97.4	97.3	97.2	97.3	98.1	99.3	100.1	100.3
2017	100.3	100.2	99.7	99.1	98.7	98.1						

③　原系列を、該当する月の中心化移動平均値で除します。既に述べたとおり、12 か月移動平均値は季節変動と不規則変動が除去されていますから､原系列を 12 か月移動平均値で除した値は、月々の季節・不規則変動要素となります。
次に各月別に平均値をとります。

④　これを月別平均法と同様に、年平均 100 になるように調整して季節指数を得ます。

第４－５表　中心化移動平均で除した原系列からもとめる季節指数

	1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月	合計	修正係数
2013							107.8	95.3	113.8	112.1	103.8	99.2		
2014	83.0	81.3	95.0	89.1	89.5	103.4	104.9	93.1	106.4	103.9	103.3	103.0		
2015	92.5	97.6	111.0	97.4	92.7	104.1	104.6	95.3	108.4	101.4	105.1	105.1		
2016	94.9	100.9	96.8	85.5	89.7	105.3	105.0	99.4	107.2	102.6	100.6	100.7		
2017	92.5	101.3	110.5	96.8	95.3	103.8								
月別平均	90.7	95.3	103.3	92.2	91.8	104.2	105.6	95.8	109.0	105.0	103.2	102.0	1198.1	1.00159
季節指数	90.8	95.5	103.5	92.4	92.0	104.4	105.8	96.0	109.2	105.2	103.4	102.2		

４．２．２　固定型と可変型

今までに紹介した方法は、いずれも観察する全期間において季節変動の型を一定、例えば 1 月は 2013 年も 2014 年も年が変わっても同じ値（固定型の季節指数）を適用しました。しかし、季節変動のパターンは、これを産み出す要因、例えば社会慣習や制度等の変化に伴って年々変化していきます。加えて、指数では品目指数の季節パターンに変化がないときでも、成長品目が総合指数へ与える相対的影響度が年々増大していきますので、総合指数に対して成長品目の季節変動パターンが次第に大きく反映されることとなります。こうしたことから、年によって季節変動のパターンが違う、可変型の季節指数を考える必要があります。

季節調整方法は比較的最近発達した方法であり､理論上絶対的なものはありません。また、季節調整を実際に行う際の作業面の考慮も必要です。

そこで次項では、パソコンを使用して容易に可変型の季節指数を計算できる、センサス局法を紹介します。

４．３　センサス局法の概要

季節調整方法の略歴

センサス局法は、米国の商務省センサス局において、主任統計官ジュリアス・シスキン(J.Shiskin)が中心となり、大型のコンピュータ利用を考慮に入れ、経済時系列全般に対しての汎用的適用を目標に開発したものです。1954 年にセンサス局法 I を公表

し、次いで 1956 年にセンサス局法Ⅱ、X（X は Experimental の意）から始まる一連番号による形で改良型を開発してきました。一般に利用可能な形で公表したのは X-3 からで、1965 年にはシスキンのほかヤング(A.Young)、マスグレイブ(J.Musgrave)らによるセンサス局法Ⅱ(X-11)という手法を公表しました。1979 年には、カナダ統計局がこれに ARIMA モデルを付加してセンサス局法Ⅱ(X-11-ARIMA)として公表しました。

1996 年には、フィンドレー(D.Findley)、ベル(W.Bell)、モンセル(B.Moncell)らが中心となり、ARIMA モデルを組み込み更に改良を加えた、X-12-ARIMA が開発され、2007 年には改良版が発表されました。更に、2017 年に、米国商務省センサス局がスペイン銀行の協力を得て開発した X-13-ARIMA-SEATS が公表されています。現在、X-13-ARIMA-SEATS のアプリケーションがセンサス局のサイトから無償でダウンロードが可能で、パソコンで季節調整を行うことができるようになっています。(https://www.census.gov/data/software/x13as.html)

我が国では、通商産業省（現経済産業省）が 1960 年に鉱工業指数用の独自の季節調整方法として、MITI 法を開発しました。また、経済企画庁（現内閣府）は、1963 年にセンサス局法をベースに EPA 法を開発しました。一方、日本銀行は 1961 年にセンサス局法Ⅱ(X-8)を導入し、同法の改良に歩調を合わせ 1967 年からセンサス局法Ⅱ(X-11)を採用していました。

こうしてしばらくの間、MITI 法、EPA 法、X-11 が並立する時期がありましたが、異なる季節調整方法を使用することは景気判断に支障を来すとして、1979 年に統計審議会（現：統計委員会）の経済指標部会において、季節調整法をセンサス局法Ⅱ（X-11）に統一する旨の提案がなされたのを契機に、各官庁の季節調整法は逐次同法に切り替えられました。ただし、鉱工業に適用する MITI 法については、この審議会では開発の経緯（短期間での季節調整が求められていた：４．４節(1)参照）から考えて例外扱いとされ、引き続き MITI 法を継続することになりました。

その後、X-12-ARIMA が 1996 年に公表されたのを受け、研究者からはこの X-12-ARIMA と X-11、MITI 法とで季節調整の結果が異なるとの指摘があり、同年に再び、統計審議会において検討が行われた結果、「手法の適切性について一般的な評価を受ける手法を、使用方法を公開しながら継続的に使用する」との指針が示されました。これを受けて日本銀行、続いて経済産業省以外の官庁統計で X-12-ARIMA の導入が進みました。

鉱工業指数（及び第３次産業活動指数）も、1995 年（平成７年）基準改定時から X-12-ARIMA へ移行しました。これにより、MITI 法とセンサス局法の違いによる利用者側の混乱を避け、他の様々な経済指標と対比できるという大きなメリットを得ることになりました。

鉱工業指数への X-12-ARIMA 導入の経緯

ここで、鉱工業指数へ X-12-ARIMA を導入した経緯を更に詳しく見てみます。景気の振幅が小さくなると、時系列データに与える曜日日数の影響が無視できなくなります。月の長さは同じでも、年によって土・日曜の数は異なり、更に祝祭日と重なるかどうかで変化し、これによって工場の操業日数が違ってきます。

生産活動の場合、曜日にかかわらず連続操業、１日３交替制や２交替制の採用、平日のみ操業といった様々な生産体制がとられていることから、全体として操業日の影響は認められるものの、なかなか統一的な方法で明瞭に分離しにくいという事情があります。このため、これらの変動を不規則変動の一部として扱って、動向の読み取りの際に配慮するといったやり方もひとつの選択肢であり、鉱工業生産指数は平成 2 年基準指数までそのように運用してきました。

1995 年（平成 7 年）基準より、曜日調整を季節調整の事前に行えるよう、当時使用していた MITI 法ⅢR を改良することを試みましたが、プログラムの保守などの負担が大きくなることなどから断念し、曜日調整を事前に行うことが可能なセンサス局法 X-12-ARIMA に移行することとしました。1995 年（平成７年）基準の当初は、X-12-ARIMA の X-11 の部分のみを用いる、いわゆる「X-11 デフォルト」で運用していましたが、2000 年（平成 12 年）の年間補正時（平成 12 年３月分確報　平成 12 年５月 17 日公表）から、曜日・祝祭日調整も導入して公表するようになりました。

異常値処理については、X-12-ARIMA を導入した後もしばらくは適用しませんでしたが、2009 年（平成 21 年）のリーマンショックによって生じた過去に例のない急激な変動をきっかけに、エコノミスト等から異常値処理の必要性が指摘されるようになりました。そして 2011 年（平成 23 年）３月、東日本大震災により指数が単月において大きく動いたことを受けて、異常値処理を導入することとなり、2010 年（平成 22 年）基準改定において、異常値処理を毎年行うことが新たに組み込まれました。

センサス局法 X-12-ARIMA における事前調整と事後診断

X-12-ARIMA は、従前の X-11 を改善したものです。大きな改善点は、①異常値や曜日変動の推計方法の改善、②移動平均による末端の欠項部分の補項方法の改善です。この改善の為に、事前調整機能とそれに加えて事後診断機能を付加しました。そのため、X-12-ARIMA は(1)regARIMA[3]による原型列の事前調整パート、(2)従来の X-11 による移動平均パート、(3)事後診断パートの３つのパートから成り立っています。

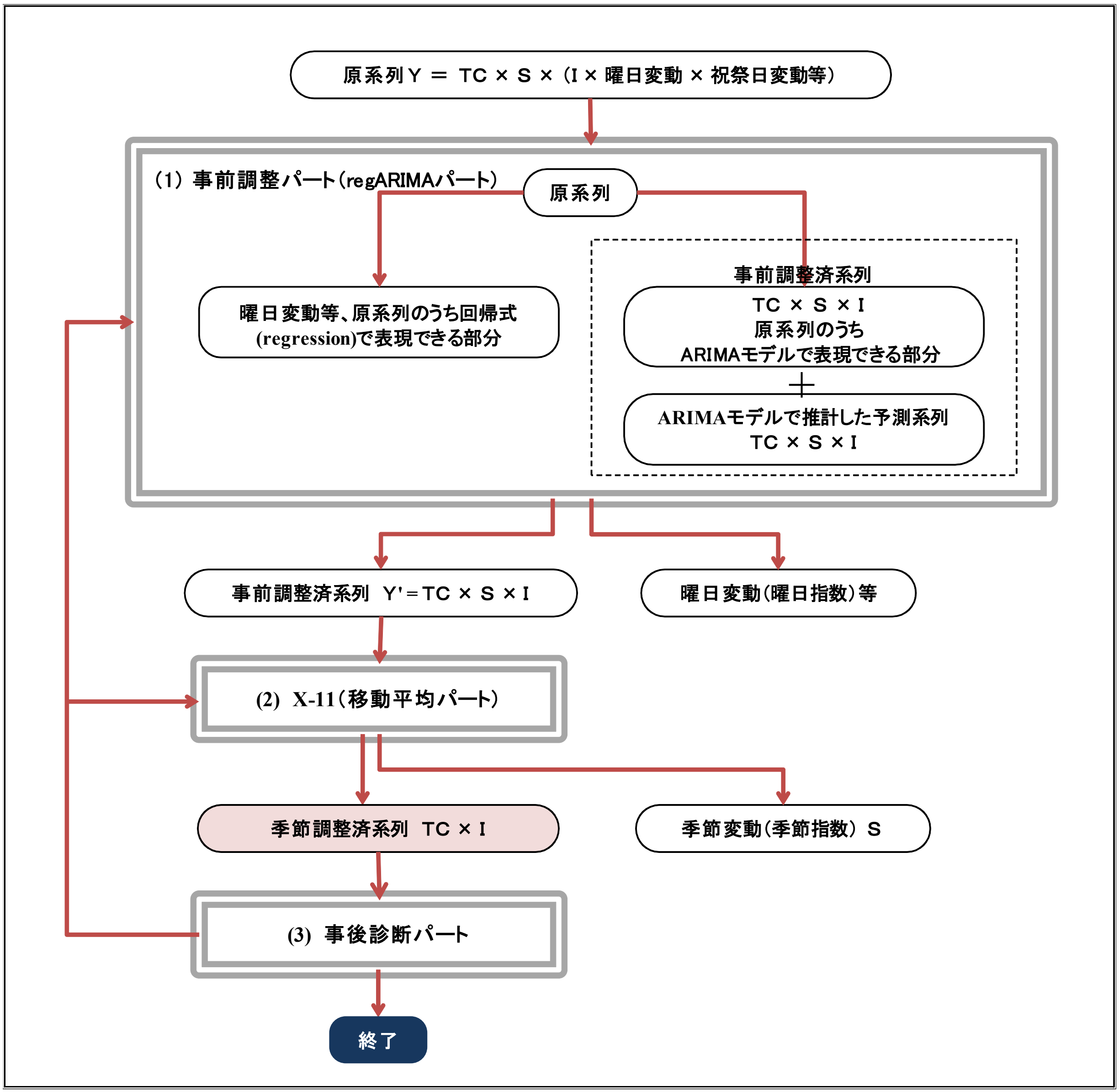
こうした改善の結果、X-12-ARIMA は個々の経済指標の性格や、季節調整を行う目的などに応じて、各種の計算手順をユーザが任意で設定できるようになりました。任意項目が増えたことは、一方では使用するハードルが上がった側面はありますが、極

[3] 事前調整では、回帰計算(Regression)と ARIMA モデルを組み合わせた手法が用いられるが、Regression and ARIMA を略して regARIMA という。

めて汎用性の高いものとなっています。

なお、ARIMA モデルとはどういうものかということについては、本節の補論「ARIMA モデルの考え方」で説明します。

第４－２図　X-12-ARIMA の推計フロー



「日本銀行月報 1996.5」を一部乗法モデル等に変更。

(1) 事前調整パート

事前調整パートは異常値（制度変更や経済環境の急激な変化、あるいは調査方法の変更などにより系列に断層ができるレベルシフトや、災害事故など突発的な動きを示す加法的外れ値など）や曜日祝祭日の処理を行い、また移動平均法の欠点であ

ったデータ端が得られない問題に対処するために、予測値を作成します。この事前調整パートは、原系列を回帰式(Regression)で表せる部分と、ARIMA モデルで表せる部分に分解します。

① Regression

原系列から異常値、曜日調整などを推計して、これを除去します。こうした処理は、この後の X-11 の計算過程で移動平均を行うときに、特別な変動の影響による歪みが残らないようにするためです。あらかじめ、曜日調整、月の長さの調整、月の長さと曜日の同時調整、うるう年調整、異常値を回帰変数として設定できます。これに加えて、ユーザが任意に変数を設定することもできます。例えばゴールデンウィークや正月休みなど、日本独自の祝祭日はこの箇所で設定します。

② ARIMA

①Regression による除去後の原系列に対し、ARIMA モデルを用いて予測値を推計します。X-12-ARIMA の ARIMA モデルは、seasonal ARIMA モデルで、12 か月を周期とする変動（＝季節変動）の季節 ARIMA を毎月における通常の変動の部分（＝通常変動）の通常 ARIMA に乗法的に取り込んだものです。

（ｐ，ｄ，ｑ） × （Ｐ，Ｄ，Ｑ）
通常 ARIMA 季節 ARIMA
p,P：AR の次数、d,D：階差の階数、q,Q：MA の次数

異常値、曜日変動などをあらかじめ除去することで、安定的な予測値を作成し、これを①除去後の原系列とつなぎ合わせて、データ端の欠項がない事前調整済原系列を作成します。以前の X-11 では、12 か月移動平均により生じた末端の欠項部分を、既知の実績値から計算していましたが（後方移動平均)、X-12-ARIMA ではデータ端へ予測値を使用することにより、欠項となる部分についても中心化移動平均値を用いることが可能となります。

(2) X-11 パート

ここでは、移動平均による季節変動の抽出を行います。X-12-ARIMA の登場以前は独立したプログラムでしたが、現在は X-12-ARIMA に組み込まれています。ちなみに、X-11 の機能のみを用いて X-12-ARIMA を用いることも可能です（このような運用方法を、X-11 デフォルトと呼んでいます)。

X-11 の特徴は以下のとおりです。

① 傾向・循環要素抽出の際の移動平均

移動平均の項数を選択できるヘンダーソンの加重移動平均を使用しています。これは３次曲線を再現する性質があります。移動平均の項数を指示しない場合は、傾向・循環要素に対する残差としての不規則要素の相対的な大きさ（I/C）に応じて自動的に移動平均項数を伸縮させることとしています。

② 異常値の修正

異常値修正は、SI 要素から I を除去するよりも、原系列を修正する考えをとっており、異常値が傾向・循環要素の推計値に影響を及ぼさないように配慮しています。処理方法は以下のとおりです。

ア　異常値の判定基準として通常、上限± 2.5σ 、下限± 1.5 σ という管理限界を設けます。ここでのσとは、不規則要素の時系列から算定される５年間の移動標準偏差です。移動標準偏差とは、例えば、10 年間のデータについて移動標準偏差を求めるには、1 年目から 5 年目までの 5 か年間（60 か月）の不規則要素(I)の標準偏差を求め、それを中心年（3 年目）に適用する「移動標準偏差」とします。同様に、計算期間を 2 年目から 6 年目、3 年目から 7 年目というように順次計算し、4 年目から 8 年目の移動標準偏差とします。最初と最後の各 2 年間は中心年とならないために、それぞれ 1 年目から 5 年目、6 年目から 10 年目の標準偏差を用います。

イ　この２つの管理限界のうち上限を超える不規則変動成分にはゼロのウェイトを付け（ 完全に除去する)、上限と下限間は０ から１ まで直線的に変化するウェイトを付け、下限以下の成分には 1 のウェイトを付けるという方法で異常値の修正を行っています。

$|I' - 1| > 2.5\delta_1$ のとき　　$W=0$

$1.5\delta_1 \leqq |I' - 1| \leqq 2.5\delta_1$ のとき　　$W=2.5\frac{|I' - 1|}{\delta_1}$

$|I' - 1| < 1.5\delta_1$ のとき　　$W=1$

とし、不規則要素 I'を次式の I^W に置き換えます。

$I^W = 1.0 + W(I' - 1.0)$

このように不規則要素を 5 年間ずつ移動しながら管理限界を算出し、判定基準の安定性を高めるという方式をとっており、このため、データを追加し再計算を行っても過去に計算した季節要素と大幅に変わることを少なくしています。さらには、全くの特異項と修正の不必要な数値とに中間部分を設け、漸増ウェイト方式により特異項を修正する方法をとっています。

なお、X-11 は X-12-ARIMA のサブセットとして完全に組み込まれており、事前調

整と事後診断を行わなければ、X-12-ARIMA は X-11 とほぼ等しくなります（ただし、X-11 の一部は、X-12-ARIMA に組み込む際に改良されているため、完全に一致するとは限りません）。

(3) 事後診断パート

季節性が正しく除去されたかどうか、異常値、オプションの設定が妥当かどうかを、統計的手法によりチェックします。季節調整の算出期間をずらした場合に、同一時点の季節変動成分がどの程度変化するか、同一時点の季節調整済データがどの程度変化するかを分析します。モデルの当てはまり度についても、AIC[4]等が計算されるため、判断の目安となります。

４．４ X-12-ARIMA の適用

鉱工業指数における X-12-ARIMA 運用上の特徴

鉱工業指数では、X-12-ARIMA を適用するにあたって、従前からの運用、作業実態に合わせて、以下のように運用しています。

(1) 季節指数作成計算の時点数

センサス局法は一般に比較的長期の時系列を対象としており、計算に使用するデータの時点数が最低７～８年間必要であるといわれています。以前の MITI 法を用いていた頃は、鉱工業活動は新規製品の台頭などによって季節パターンが急激に変化することもあるため、短い期間の季節調整が適している、との考えに基づき、５年間の系列で運用してきましたが、X-12-ARIMA に移行するにあたって７年間のデータで計算することにしました。また、2010 年（平成 22 年）基準改定においては、季節要素のより確実な抽出のために期間を伸ばし、８年間のデータで計算することにしました。

(2) 暫定季節調整方式

X-12-ARIMA は、１か月分のデータが追加されるごとに季節指数を作成、更新できます。しかし、そうすると公表する毎に最新月はもちろん、過去の季節調整済指数が全て入れ替わってしまいます。あまりに頻繁な季節調整済指数の修正は、利用者にとってかえって不便となってしまいます。そこで、鉱工業指数では毎月の公表時では季節指数を更新せず、年に１回、４月頃に行う年間補正時（指数のもととな

[4] AIC(Akaike Information Criterion)とは、モデルの当てはまりを評価する情報量基準のひとつ。数値が小さいほど当てはまりが良いと考えられる。

る実数について、前年１年間の数値を修正し、確定値とする時）に季節指数を更新し、季節調整値を修正しています。

その際には、更新するのは過去１年分とし、それ以前の値については遡って修正しません。これは季節調整済指数が頻繁に過去に遡って改定されることにより、利用者に最終データとその変更時期が判らなくなる混乱を避けるためです。なお、基準改定では実数を全て入れ替えるため､全期間について季節指数の計算を行います。

季節指数の作成の具体的なタイミングは次のとおりです。

① 基準改定時は、全ての季節指数を計算し、季節調整済指数を作成します（原系列全て入れ替えるため)。季節指数計算に使用するデータは、基準年から遡って過去５年、基準年、基準年後２年の、計８年間です。

例：2015 年（平成 27 年）基準改定（2018 年 11 月 14 日公表）では、以下のデータを使用。

・2010～2014 年（基準年からさかのぼって過去５年）

・2015 年（基準年）

・平成 2016～2017 年（基準年後２年）ただし、公表は 2013 年（平成 20 年）からの値を公表しました。

※ 鉱工業指数は、基準年次及びその前後２年ずつの計５年間が、当該基準での値となるため。上記について言えば、2013 年は 2015 年基準の値、2012 年は 2010 年基準の値が公式の値となり、2010～2012 年について 2015 年基準で計算した値は公表しない。

② 毎月の運用では、データが月々追加されても、その都度、季節指数の再計算は行いません。

③ 年間補正時には、年間補正の対象となった１年を追加して、過去８年間で季節指数を計算します。この年間補正時の作成では、以下２点の特徴があります。

ア．計算には８年間の原指数を使いますが、年間補正の対象となった最新の１年分について計算した季節指数を使用し、それ以前の季節指数は、従前のものをそのまま使用します。これは、毎年計算し直した季節指数を全て適用すると、過去の季節調整済指数がそのたびに変わってしまい、利用する際に不便となってしまうためです。

イ．年間補正の対象となった年の翌年の季節指数も、このときに設定します。ただし、計算では出てこないので、年間補正の対象となった年の季節指数を、曜日、祝祭日を調整した上で使用します。これを「暫定季節指数」と呼んでいます。暫定季節指数は、14 か月分計算します（年間補正作業は、対象となる年の翌年２月分確報時（毎年４月頃）に行うことが通例であることから、次の年間補正までの季節指数を計算しておくためです)。

④ 年間補正時の季節指数再計算に使用するデータの期間は、直近の１年間を追加し、最も古い１年間を除外した８年間になります。

例：2018 年の年間補正時は、2011 年～2018 年のデータを使用
2019 年の年間補正時は、2012 年～2019 年のデータを使用

再計算では８年分のデータを使用するため、季節指数も８年分が新たに計算されますが、使用するのは年間補正の対象となった最新１年分のみとします。

また、次の年間補正までの暫定的な季節指数として、最新１年分に曜日・祝祭日修正を行ったものを、使用します。

例：2018 年年間補正時における、季節指数の状況

2017 年	基準改定時に計算したもので確定
2018 年	暫定として 2017 年の季節指数を使用していたが、年間補正で計算したもので確定
2019 年	2018 年季節指数を、曜日・祝祭日修正だけ 2019 年を使用して運用。次の年間補正で季節指数を確定させる。

以上の工程を、次の基準改定まで繰り返します。

(3) ARIMA モデルの選定

事前調整パートは、ARIMA モデルの設定が必要となります。2010 年（平成 22 年）基準までの鉱工業指数では、全系列において同じモデルを使用していましたが、2015 年（平成 27 年）では系列ごとに最適なモデルを設定しており、生産指数が(110)(011)、出荷指数が(011)(011)、在庫指数・在庫率指数が(010)(011)、稼働率指数が(111)(011)となっています。

モデル選定の方法は以下のとおりです。

① エアラインモデル[5]により仮の異常値を算出する
② 仮の異常値を設定し、ボックス・ジェンキンス法により、p,d,q,P,D,Q の各次数の範囲を決めて、モデル比較のための計算を行う
③ 一番 BIC[6] の小さい ARIMA モデルを選定し、もう一度異常値を算出する

また、後述(6)の「曜日調整及び祝祭日調整、うるう年調整」については、①では全て設定し、有意でなかった変数があれば以降の計算から除外しました。

(4) 予測系列の採用

ARIMA モデルで推計した予測系列は 2005 年（平成 17 年）基準から採用しています（期間は 12 か月）。これによって、移動平均では欠損となる直近時点の結果が

[5] ARIMA モデル (011) (011)。一般的に当てはまりの良いモデルとされており、暫定的にモデルを設定する場合等に用いられることが多い。

[6] BIC(Bayesian Information Criterion)とは、モデルの当てはまりを評価する情報量基準のひとつ。数値が小さいほど当てはまりが良いと考えられる。

安定的となっています。

⑸ 異常値の処理

鉱工業指数では、異常値の候補を X-12-ARIMA の異常値検出機能[7]を使用して検出し、それが経済活動からみて妥当なものであれば、異常値として設定しています。

自動検出機能を使うのは、できるだけ恣意的な判断に寄らず、機械的に判別できるもののみを異常値にする、という発想によるものです。

この異常値は、年間補正のたびに新たな１年を追加して検出、検討を行った上で、設定をします。その際には、しきい値に達しない候補であってもそれを異常値とすることが妥当と判断された場合には、異常値として設定します[8]。

⑹ 曜日調整及び祝祭日調整、うるう年調整

鉱工業指数では、X-12-ARIMA に切り替えたときから曜日調整及び祝祭日調整、を行っています。これらは生産や出荷、稼働率などのフローの系列のみについて行い、在庫指数、在庫率指数、生産能力指数のストック系列については行っていません[9]。

なお、うるう年調整については、2015 年（平成 27 年）基準では、全ての変数を設定して試算した結果、有意でなかったため適用していません。

フローの系列に適用する最終的な季節指数は、以下のように各要素の掛け合わせになります。

最終季節指数＝曜日要素×祝祭日要素×季節要素

① 曜日要素については、regARIMA の曜日調整機能には、各曜日の効果を調整する７曜日調整と、月～金と土・日曜日の２つに分けて調整する２曜日調整があり、検証の結果、多くの系列で２曜日調整の方が良好であったことから、２曜日調整を採用しています。

② 祝祭日要素は、日本独自のものであることから、ユーザ定義の変数を作成し、取り込ませています。この際、振替休日も祝日としてカウントしています。

③ うるう年調整を適用する場合は、ダミー変数を用いた調整を行います（regression コマンドの lpyear 変数を使用）。

スペックファイル

[7] outlier コマンド。ただし、傾斜的水準変化（rp）が検出できない、デフォルトのしきい値が高い、という注意点がある。

[8] outlier コマンドを使用すると、しきい値を超えた時点の他、しきい値は超えないものの異常値の恐れがある時点も異常値候補として検出する。例えば 2010 年（平成 22 年）基準では、リーマンショックは異常値としては出なかったものの、候補としては出たことから、検討の結果、異常値として設定した。

[9] 鉱工業指数では期末在庫を使用していることから、曜日、祝祭日の影響はない、という発想による。月末が平日か祝祭日かという調整も行っていない。

スペックファイルは、X-12-ARIMA における様々なオプションを設定するファイルです。第４－６表のように、このファイルは基本的な命令文とそれに対応する引数及び数値で表されます。

また、X-12-ARIMA を実行すると、様々な出力ファイルが生成されます。季節調整を行う際に出力される、代表的なファイルは第４－７表のとおりです。

第４－６表　X-12-ARIMA の命令文

命令文	内容
series	データ、開始時期、季節区分(四半期 or 月次)、対象とする期間、系列のタイトルを指定する。
transform	事前調整の前にデータの変換を行う際に使用。対数変換などを指定する。
x11	季節調整における加法、乗法といった分解方法、保存するデータなどを指定する。
identify	regARIMA モデルの ARIMA 部分を識別するために、自己相関・偏自己相関係数を生成する。
regression	regARIMA モデルで用いる各種回帰変数（曜日、祝祭日、異常値など）を指定する。
arima	regARIMA モデルの ARIMA 部分を指定する。
automdl	ARIMA モデルについて、自動的に最善と考えれるモデルを比較し、その中から最適なモデルを選び出す。
estimate	regression 及び arima で指定されるモデルの推定を指示し、また繰り返し推計の回数を指定する。
outlier	異常値の自動検出を指定する。
check	推定されたモデルの診断に有益な統計量を生成する。
forecast	推定したモデルに基づく予測期間を指定する。無設定では１年間。
slidingspans	季節調整の安定性について、データ範囲をずらして検証を行う。
history	季節調整の改定値の履歴や関連する regARIMA モデルの統計量を求める。

第４－７表　X-12-ARIMA における出力ファイルの一例

出力ファイル拡張子	対応する命令文	内　容
out	なし	X-12-ARIMA の実行結果（総括表）
err	なし	X-12-ARIMA のエラーメッセージ（エラーがなくても必ず出力される）
d10	x11	季節変動（曜日変動等も加えたもの）（Ｓ）
d11	x11	季節調整済系列（ＴＣ・Ｉ）
d12	x11	趨勢循環成分（ＴＣ）
d13	x11	不規則変動成分（Ｉ）
d16	x11	季節×曜日変動
td	regression	曜日変動
hol	regression	祝祭日変動
mdl	estimate	regARIMA モデルのパラメータ（回帰パラメータ等）

第４－８表に示すのは、鉱工業指数で用いている、X-12-ARIMA のスペックファイルです。ここでは、命令文に対応する引数について説明しています。

第４－８表　鉱工業指数のスペックファイル（2015 年基準改定時点）

スペックファイル		引数の説明
命令文	引数	
series	{ start = 2010.1	原系列の開始時点。この場合は2010年1月
	span = (2010.1,2017.12)	季節調整の対象期間。この場合は2010年1月～2017年12月
	decimals = 1 }	原系列の小数点の有効桁数。この場合は1桁
transform	{ function = log }	原系列の対数変換を行う(分散を一定化させ定常データにするため)
arima	{ model = (1 1 0)(0 1 1) }	ARIMAモデルの型は(1 1 0)(0 1 1)
regression	{ variables = (td1nolpyear)	2曜日調整を行う
	save = (td hol)	td,holファイル出力
	user = (jap-hol)	ユーザ定義変数の名称は"jap-hol"
	usertype = holiday	ユーザ定義変数の型は祝祭日型
	start = 2010.1	ユーザ定義変数の開始年は2010年１月
	file = "holi.dat" }	ユーザ定義変数のファイル名は"holi.dat"
forecast	{ maxlead = 12 }	予測期間は12時点
estimate	{ save = (mdl)	mdlファイル出力
	maxiter = 500 }	ARMAパラメータ推定の最大反復回数は500
x11	{ print = (none + d10 + d11 + d16)	outファイルにd10～d16ファイルの情報を出力
	save = (d10 d11 d16)	d10,d11,d16ファイル出力
	seasonalma=x11default }	移動平均項数は、旧X-11標準型

なお、季節調整済指数及び各要素は、以下の計算方法で計算されます。

季節調整済指数　＝　原指数　÷　季節指数

季節指数　　　　＝　季節要素　×　曜日要素　×　祝祭日要素

（参考）曜日、祝祭日、うるう年調整用の変数の作成方法

前述のとおり、直近の年における季節指数は、暫定方式ということで前年の季節要素をスライドし、曜日及び祝祭日を変えて使用しています（2015 年（平成 27 年）基準ではうるう年調整は行わず、祝祭日調整のみ)。

曜日、うるう年及び祝祭日変数は、回帰変数と回帰パラメータにより計算されているため、カレンダー情報と X-12-ARIMA の回帰パラメータから直近の年のものを作成できます。以下では、直近の年におけるこれら変数の作成方法について記述します。

①　祝祭日変数の作成方法

スペックファイル中の file="holi.dat"で指定される、ユーザ定義による祝祭日 注 変数（祝祭日パターンを表したもの）は、以下の手順で設定しています。

ア．季節指数計算の対象年月（８年間）について、1 月から 12 月ごとに、毎年、平日（月曜日から金曜日）が祝祭日になる日数（A）を数え、次にその８年間

の平均値（B）を求めます。

イ．各年の各月について、その月の日数（A）から平均値（B）を差し引いた値を求めます。

注：鉱工業指数の 2015 年（平成 27 年）基準改定時で採用した祝祭日は、以下のとおりです（祝祭日は年によって変更がありうることに留意)。

元旦、成人の日、建国記念の日、春分の日、昭和の日、憲法記念日、みどりの日、こどもの日、海の日、山の日、敬老の日、秋分の日、体育の日、文化の日、勤労感謝の日、天皇誕生日、国民の休日とそれぞれの振替休日

具体的な作成データは以下のとおりです。

第４－９表　各年月の祝祭日の日数

	1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月
2010	2	1	1	1	3	0	1	0	2	1	2	1
2011	1	1	1	1	3	0	1	0	2	1	2	1
2012	2	0	1	1	2	0	1	0	1	1	1	1
2013	2	1	1	1	2	0	1	0	2	1	1	1
2014	2	1	1	1	2	0	1	0	2	1	2	1
2015	2	1	0	1	3	0	1	0	3	1	2	1
2016	2	1	1	1	3	0	1	1	2	1	2	1
2017	2	0	1	0	3	0	1	1	1	1	2	0
平均	1.875	0.75	0.875	0.875	2.625	0	1	0.25	1.875	1	1.75	0.875

第４－１０表　祝祭日変数（各年月の日数－８年間の平均）

	1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月
2010	0.125	0.25	0.125	0.125	0.375	0	0	−0.25	0.125	0	0.25	0.125
2011	−0.875	0.25	0.125	0.125	0.375	0	0	−0.25	0.125	0	0.25	0.125
2012	0.125	−0.75	0.125	0.125	−0.625	0	0	−0.25	−0.875	0	−0.75	0.125
2013	0.125	0.25	0.125	0.125	−0.625	0	0	−0.25	0.125	0	−0.75	0.125
2014	0.125	0.25	0.125	0.125	−0.625	0	0	−0.25	0.125	0	0.25	0.125
2015	0.125	0.25	−0.875	0.125	0.375	0	0	−0.25	1.125	0	0.25	0.125
2016	0.125	0.25	0.125	0.125	0.375	0	0	0.75	0.125	0	0.25	0.125
2017	0.125	−0.75	0.125	−0.875	0.375	0	0	0.75	−0.875	0	0.25	−0.875

②　曜日変数の作成

曜日変数は、各年月の曜日日数表を作成し、この表に基づいて以下のように計算します。

曜日変数　　＝｛月曜日の日数－（土・日曜日の日数の平均)
　　　　　　　＋ 火曜日の日数－（土・日曜日の日数の平均）＋…
　　　　　　　＋ 金曜日の日数の平均－（土・日曜日の日数の平均)｝

第４－１１表　各年月の曜日別の日数

年月	月曜日の日数	火曜日の日数	水曜日の日数	木曜日の日数	金曜日の日数	土曜日の日数	日曜日の日数	土日の平均	月	火	水	木	金	合計	曜日変数
2015年1月	4	4	4	5	5	5	4	4.5	−0.5	−0.5	−0.5	0.5	0.5		−0.5
2015年2月	4	4	4	4	4	4	4	4	0	0	0	0	0		0
2015年3月	5	5	4	4	4	4	5	4.5	0.5	0.5	−0.5	−0.5	−0.5		−0.5
2015年4月	4	4	5	5	4	4	4	4	0	0	1	1	0		2
2015年5月	4	4	4	4	5	5	5	5	−1	−1	−1	−1	0		−4
2015年6月	5	5	4	4	4	4	4	4	1	1	0	0	0		2
2015年7月	4	4	5	5	5	4	4	4	0	0	1	1	1		3
2015年8月	5	4	4	4	4	5	5	5	0	−1	−1	−1	−1		−4
2015年9月	4	5	5	4	4	4	4	4	0	1	1	0	0		2
2015年10月	4	4	4	5	5	5	4	4.5	−0.5	−0.5	−0.5	0.5	0.5		−0.5
2015年11月	5	4	4	4	4	4	5	4.5	0.5	−0.5	−0.5	−0.5	−0.5		−1.5
2015年12月	4	5	5	5	4	4	4	4	0	1	1	1	0		3

③　うるう年変数

うるう年変数は 2015 年（平成 27 年）基準では有意でないため適用していませんが、適用する場合は、うるう年の 2 月は 0.75、うるう年以外の 2 月は-0.25、2 月以外は 0、というダミー変数を使用します（regression コマンドの lpyear 変数を使用）。

（補論）ARIMA モデルの考え方

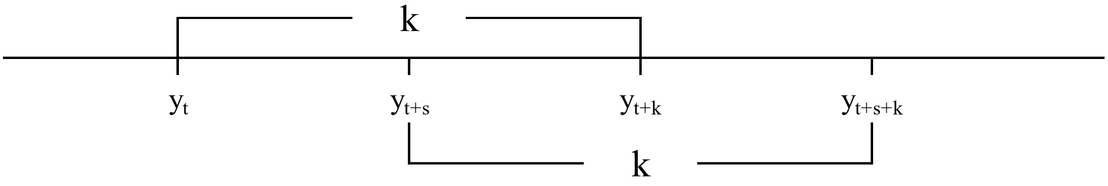
時系列モデル

センサス局法 X-12-ARIMA は、それ以前に用いてきたセンサス局法Ⅱ X-11 に事前調整機能と事後診断機能を付加した手法です。この事前調整機能の中には、ARIMA モデルという時系列モデルが組み込まれています。事前調整では、原系列から異常値の調整及び曜日調整などを回帰計算（Regression）によって処理する過程と、ARIMA モデルによって先行きデータを予測する過程があり、これらを併せた計算過程を regARIMA モデルと呼んでいます。ここでは、ARIMA というモデルはどういうものかについてその考え方を説明します。

ある時系列データの先行きを予測するには、そのデータの変動要因の動きによって予測する計量経済モデルの手法がよく用いられます。これは、当該系列自身の過去の動きによって予測するもので、これを時系列モデルによる手法といいます。

時系列モデルでは、t 期に観察されたデータ y_t は過去から将来の全期間にわたる変数の集合（この集合を確率過程、変数を確率変数と呼びます）の中から、たまたま確率的に実現したデータであると考えます。しかし、t 期の実現値 yt は 1 個しかありませんから、その平均やバラツキなどを計算することはできません。そこで一定の前提を置きます。それは「定常確率過程」（stationary stochastic process）という前提です。

定常とは、１．時系列データの平均（期待値）が一定（トレンドがフラット）、２．分散が一定、３．自己相関が時点の差のみに依存という条件に当てはまる状態をいいます。ここで自己相関係数という言葉が出てきましたが、当該時系列について t 期の値 y_t と k 期離れた値 y_{t+k} との相関関係を自己相関又は系列相関といい、定常性を持つ時系列は、ある時点から k 期ズレ込んだときの自己相関係数が、どの時点をとっても一定の値をとるというものです。すなわち、下図において y_t が定常確率過程に従っているなら、y_t と y_{t+k} の相関と y_{t+s} と y_{t+s+k} の相関は等しくなります。



そして、観察された時系列データは定常確率過程の中から得られたものと考えます。これを前提に、AR、MA、ARMA 時系列モデルについての議論を進めます。

AR モデル、MA モデル、ARMA モデル

・AR モデル

まず、時系列 y について、当期の値 y_tは、当期のランダムな変動と過去の y の加重和との計で表される次のモデルを考えます。

$$y_t = u_t + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots\cdots + \phi_p y_{t-p}$$

この式は、１期前から p 期前まで自己自身の過去データの値とその期におけるランダムな動きによって当期を説明するもので、次数 p の「AR モデル」（自己回帰 Autoregressive model）と呼ばれ、AR(p)モデルと表現します。

・MA モデル

次に、時系列の当期の値 y_tが現在及び過去 q 期までのそれぞれ固有なランダム部分の加重和によって説明されるモデルを考えます。

$$y_t = u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \cdots\cdots + \theta_q u_{t-q}$$

このモデルは次数 q の「MA モデル」（移動平均 Moving Average model）と呼ばれ、MA(q)モデルと表現します。

・ARMA モデル

そして、AR(p)モデルと MA(q)を組合せた形のモデル、すなわち、当期の y_tを過去の y の値の加重和及び当期から過去にわたる各期のランダムな変動の加重和で説明するモデルを考え、これを「ARMA モデル」（AutoRegressive Moving Average model）と呼びます。

$$\begin{aligned} y_t = \ & \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots\cdots + \phi_p y_{t-p} \\ & + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \cdots\cdots + \theta_q u_{t-q} \end{aligned}$$

これを ARMA(p,q)と表現します。ここで $\theta_j=0$（j＝1，……，q）とすると、このモデルは AR(p)モデルとなり、$\phi_i=0$（i＝1，……，p）とすると MA(q)モデルとなります。

なお、ARMA(p,q)で p＝q＝0 のケース、つまり、ARMA(0,0)は、u_tのみのモデルとなります。この当期のランダム変動 u_tのみからなるモデルをホワイト・ノイズモデル（white noise model）といいます。ホワイト・ノイズモデルは、平均 0 で、系列無相関（それ自身の過去の数値が現在未来の数値に影響を与えることのない）の、確率的に変動する変数です。

ARMA(p,q)は、以下のように表現できましたが、

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots\cdots + \phi_p y_{t-p}$$
$$+ u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \cdots\cdots + \theta_q u_{t-q}$$

t＋１期は次のように表すことができます。

$$y_{t+1} = \phi_1 y_t + \phi_2 y_{t-1} + \cdots\cdots + \phi_p y_{t-p+1}$$
$$+ u_{t+1} + \theta_1 u_t + \theta_2 u_{t-1} + \cdots\cdots + \theta_q u_{t-q+1}$$

ここで、y_t，……，y_{t-p+1}、u_t，……，u_{t-q+1}及びパラメータϕ_i（i＝1，……，p）、θ_j（j＝1，……，q）が既知だとすると、未知数はu_{t+1}だけになります。u_{t+1}はｔ時点では知ることができませんが、u_tはもともとランダムな変数ですから予測値も入れたu_t全体の平均値は０と期待していいということになります。そこでy_{t+1}の値を次により求めます。

$$y_{t+1} = \phi_1 y_t + \phi_2 y_{t-1} + \cdots\cdots + \phi_p y_{t-p+1}$$
$$+ \theta_1 u_t + \theta_2 u_{t-1} + \cdots\cdots + \theta_q u_{t-q+1}$$

以下、予測値を入れて同様の計算を繰り返すことで、t+2 期より先の値も求めることができます。ただし、繰り返すごとに実際のデータが減っていき、ついには予測された数値のみで先を予測することになります。

ARIMA モデルとその適用

我々が実際に観察する時系列データは、傾向変動や循環変動を持っているのが普通ですから、平均や分散は一定ではなく時とともに拡大したり縮小したりします。これを時系列モデルとして処理するには定常化しなければなりません。センサス局法の ARIMA の手法では、平均が一定でない場合は ARIMA モデルで階差をとることで、分散が一定でない場合はデータを対数変換する指定（スペックファイルの transform の記述参照）をすることで定常な系列に調整することができます。

平均が一定でない場合の「階差」とは、もとの時系列の隣り合った数値どうしの差の事です。もとの系列を（y_1，y_2，y_3，……，y_t）とすると、１階階差は（(y_1－y_2)，(y_2－y_3)，……，(y_{t-1}－y_t)）であり、２階階差は更にその階差となります（(y_1－y_2）－（y_2－y_3），……，（y_t－y_{t-1}）－（y_{t-1}－y_{t-2})）。これによる ARMA モデルを「integratedARMA モデル」、あるいは「ARIMA モデル」（自己回帰和分移動平均 AutoRegressive Integrated Moving Average model）と呼び、一般に階差を d 階、AR を p 次（過去に p 次遡ったモデル)、MA を q 次（過去に q 次遡ったモデル）とする ARIMA モデルは ARIMA(p,d,q)と表現します。予測は、このモデルで行うことになります。

ARIMA モデルを作るためには、使用するデータ期間及び AR（自己回帰）の次数（p)、MA（移動平均）の次数(q)、階差の階数(d)をどう決めるかが大きな問題となります。一般にデータを多くとればモデル全体の当てはまりは良くなる反面、過去のデータの影響が大きくなって予測の信頼度が低下することが多いのですが、AIC や BIC といった情報量基準を用いることで最適な次数や階数を判断することができます。

次の問題は、パラメータ ϕ_i、θ_iの推計方法です。これについては、計量経済モデルで最尤法（さいゆうほう）という手法がよく用いられており、この時系列モデルでもこの手法で推計するのが一般的です。これらの内容を説明するのはやや進んだ統計学の知識を必要とし、本書の範囲を超えるので省略します。なお、X-12-ARIMA にこの手法が組み込まれており、パラメータ ϕ_i、θ_iが推計できるようになっています。

（参考） X-12-ARIMA 内の X-11 の計算手順

regARIMA モデルにより出力された、事前調整済原系列（曜日祝祭日変動等を取り除いたもの）に対し、X-11 が実行されます。X-11 による各変動要素の抽出は、以下に示す Stage1～3 を反復することによって行われます。ここでは、時系列分解を乗法モデルで想定しています。

<u>Stage1.初期推計</u>

S1-① 原系列 Y_tに対し、中心化 12 項移動平均を行い、初期循環変動 $T_t^{(1)}$を算出

$$T_t^{(1)}=\frac{1}{24}Y_{t-6}+\frac{1}{12}Y_{t-5}+\cdots+\frac{1}{12}Y_t+\cdots+\frac{1}{12}Y_{t+5}+\frac{1}{24}Y_{t+6}$$

S1-② 原系列 Y_tを①で除し、初期季節・不規則変動 $SI_t^{(1)}$を算出

$$SI_t^{(1)}=\frac{Y_t}{T_t^{(1)}}$$

S1-③ ②に対し 3×3 項季節移動平均を行い、初期暫定季節変動$\hat{S}_t^{(1)}$を算出

$$\hat{S}_t^{(1)}=\frac{1}{9}SI_{t-24}^{(1)}+\frac{2}{9}SI_{t-12}^{(1)}+\frac{3}{9}SI_t^{(1)}+\frac{2}{9}SI_{t+12}^{(1)}+\frac{1}{9}SI_{t+24}^{(1)}$$

S1-④ ③に対し、③の時点を中心とした中心化 12 項移動平均値で除し、初期季節変動 $S_t^{(1)}$を算出

$$S_t^{(1)} = \frac{\hat{S}_t^{(1)}}{\frac{1}{24}\hat{S}_{t-6}^{(1)} + \frac{1}{12}\hat{S}_{t-5}^{(1)} + \cdots + \frac{1}{12}\hat{S}_t^{(1)} + \cdots + \frac{1}{12}\hat{S}_{t+5}^{(1)} + \frac{1}{24}\hat{S}_{t+6}^{(1)}}$$

S1-⑤　原系列 Y_tを④で除し、初期季節調整結果 $A_t^{(1)}$を算出

$$A_t^{(1)} = \frac{Y_t}{S_t^{(1)}}$$

Stage2.季節要因と季節調整

S2-①　ヘンダーソン加重移動平均により、中間的な循環変動 $T_t^{(2)}$を推計

$$T_t^{(2)} = \sum_{j=-H}^{H} h_j^{(2H+1)} A_{t+j}^{(1)}$$ h：ヘンダーソンウェイト、（2H+1）：h の期間

S2-②　原系列 Yt を①で除し、初期季節・不規則比率 $SI_t^{(2)}$を算出

$$SI_t^{(2)} = \frac{Y_t}{T_t^{(2)}}$$

S2-③　②に対し 3×5 項季節移動平均を行い、暫定季節変動$\hat{S}_t^{(2)}$を算出

$$\hat{S}_t^{(2)} = \frac{1}{15}SI^{(2)}{}_{t-36} + \frac{2}{15}SI^{(2)}{}_{t-24} + \frac{3}{15}SI_{t-12}^{(2)} + \frac{3}{15}SI^{(2)}{}_t + \frac{3}{15}SI_{t+12}^{(2)} + \frac{2}{15}SI^{(2)}{}_{t+24} + \frac{1}{15}SI^{(2)}{}_{t+36}$$

※ 反復計算の最終段階では、移動平均の項数は 3×5 の固定ではなく 3×3、3×5、3×9 のどれかから選択される。

S2-④　③に対し、③の時点を中心とした中心化 12 項移動平均値で除し、最終季節変動 $S_t^{(2)}$を算出

$$S_t^{(2)} = \frac{\hat{S}_t^{(2)}}{\frac{1}{24}\hat{S}_{t-6}^{(2)} + \frac{1}{12}\hat{S}_{t-5}^{(2)} + \cdots + \frac{1}{12}\hat{S}_t^{(2)} + \cdots + \frac{1}{12}\hat{S}_{t+5}^{(2)} + \frac{1}{24}\hat{S}_{t+6}^{(2)}}$$

S2-⑤　原系列 Yt を④で除し、季節調整結果 $A_t^{(2)}$を算出

$$A_t^{(2)} = \frac{Y_t}{S_t^{(2)}}$$

Stage3.最終循環変動と最終不規則変動

S3-①　ヘンダーソン加重移動平均により、最終循環変動 $T_t^{(3)}$推計

$$T_t^{(3)} = \sum_{j=-H}^{H} h_j^{(2H+1)} A_{t+j}^{(2)}$$

S3-②　季節調整結果 $A_t^{(2)}$を①で除し、最終不規則変動 $I_t^{(3)}$を算出

$$I_t^{(3)} = \frac{A_t^{(2)}}{T_t^{(3)}}$$

以上、繰り返し

◎反復計算後の最終的な推計結果

$$Y_t = T_t^{(3)} S_t^{(2)} I_t^{(3)}$$

コラム　過去の鉱工業指数で使われていた季節調整法　～MITI 法の特徴～

MITI 法は、センサス局法と同じ可変型の季節調整手法で、経済産業省の前身である通商産業省が鉱工業指数に適用することを主たる目的として、昭和 35 年基準で独自に開発したものです。当時、コンピュータの性能に限りがあったことから、MITI 法では計算の過程を鉱工業指数の系列の特性に見合ったものに絞り込むことで計算を簡素化し、大量の系列の同時処理を行うことを可能としていました。そして基準改定ごとに改良を重ね、最終バージョンは MITI 法ⅢR となります。

しかし、季節調整済系列は手法の違いによっては相違が生ずることがありますから、異なる季節調整を適用したものを比べようとすると利用者側は混乱してしまいます。この点に関しては、はん用的な手法であるセンサス局法が便利でした。こうしたこともあり、鉱工業指数は季節調整方法について、様々な検討を経て、平成 7 年基準以降は X-12-ARIMA に変更したため、現在は使用されていません。

MITI 法ⅢR の計算手順とその特徴は、以下のとおりとなっています。

(1) 季節性が年々変化することを想定した可変型季節変動の考えに立っています。また、センサス局法と同様に 12 か月移動平均法を基礎としています。

(2) 原系列における傾向・循環要素を 19 項加重移動平均値で近似しています。この移動平均には次の性格を持たせています。

① 中心化 12 か月移動平均と同程度に季節性を除去する。

② 傾向・循環変動における 3 次曲線のカーブをそのまま再現しようとする。

③ 残る不規則変動をできるだけ小さくする。

計算手順としては最初に 12 か月移動平均を行い、次に 8 項加重移動平均を行うことにより、結果的に 19 項加重移動平均値を得ます。移動平均により生ずる両端の欠項については、ウェイトを変化させて加重平均を行い、補項を行います。

④ 傾向・循環要素の抽出に際し、不規則変動による移動平均の歪みをできる限り小さくするため、異常値の調整を行うことによって安定的な傾向・循環要素の摘出を行います。

(3) 各月の季節要素は過去 5 年のものを用い、これを 5 項加重平均することにより求めています。この際のウェイトは、算出すべき季節変動の年ごとの動きが不規則にならないように、言い換えれば、不規則変動に左右されることなく安定的な季節変動を摘出するよう工夫されたものです。

(4) 計算した季節要素から暫定季節指数を求め、原系列をこれで除して暫定季節調整済指数を作成します。さらに、暫定季節調整済指数に 11 項加重移動平均を行い、最終的な傾向・循環要素とします。これと原系列とで最終的な季節要素を計算します。その際、再び特異項の調整及び各月について 5 項加重平均を行って、季節指数を作成します。

(5) 5 年プラス前後各 2 か月、計 64 か月の原系列を用います。欠項補項等により、結局５年間の季節・不規則変動から季節指数が算出されることとなります（35 年及び 40 年基準では、原系列を 60 か月としていました。45 年基準から 64 か月となりました）。

鉱工業指数における季節調整手法の歴史

昭和 30 年基準	連環比率法
35 年	MITI 法Ⅰ
40 年	MITI 法Ⅱ
45 年	MITI 法Ⅱ改良型
50 年,55 年	MITI 法Ⅲ
60 年,平成２年	MITI 法ⅢＲ
７年～	X-12-ARIMA